

Séries de Puiseux: un algorithme dichotomique

Adrien Poteaux* & Martin Weimann‡ & Marc Rybowicz†

*: GAIA-CFHP - CO2 - CRISAL - Université de Lille

‡: GAATI - Université de Polynésie Française

†: DMI - XLIM - Université de Limoges ; mort en Novembre 2016

JNCF 2018, Luminy

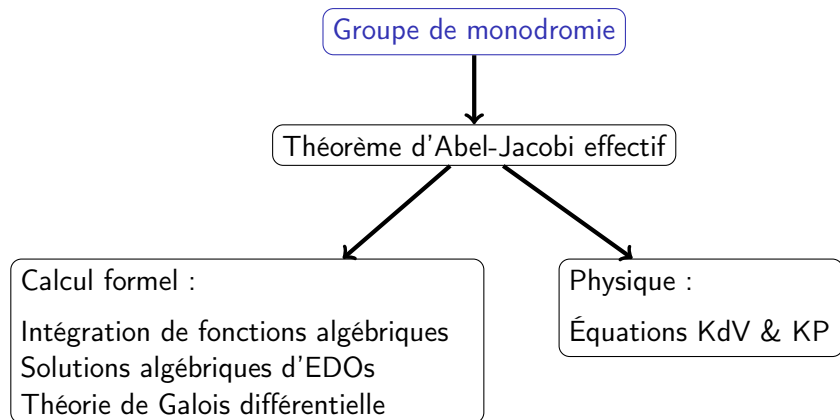
24 Janvier 2018

soumis à JFoCM

[arXiv:1708.09067](https://arxiv.org/abs/1708.09067)

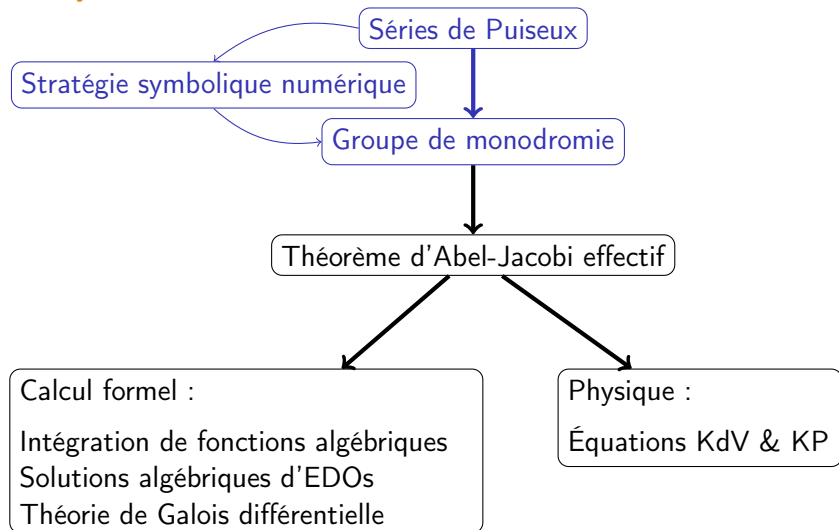
[hal-01578214](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01578214)





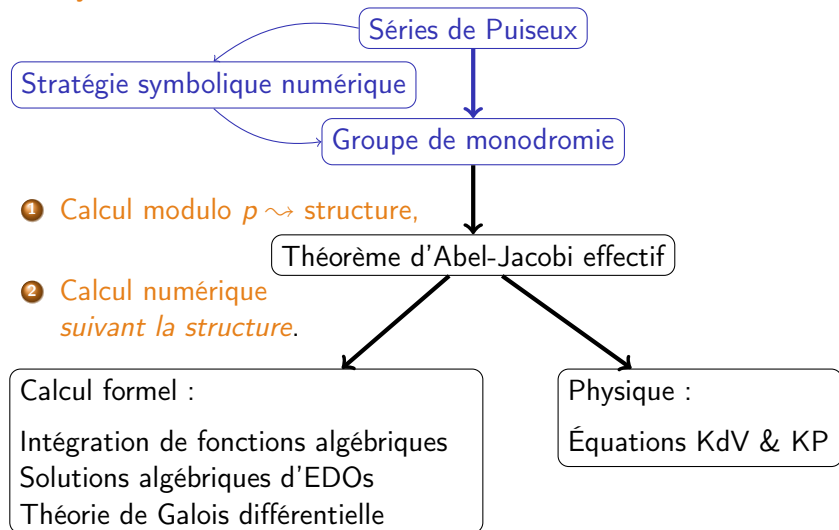
Luminy 2007

Previsouly, in JNCF



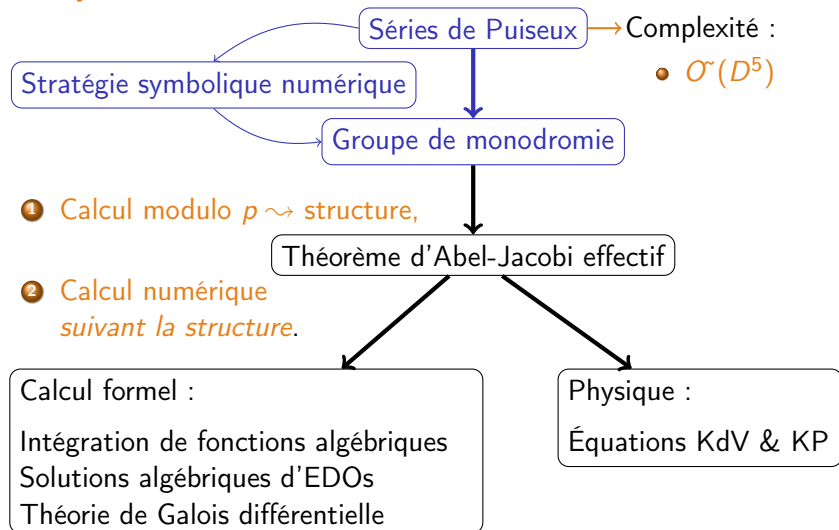
Luminy 2007

Previsouly, in JNCF



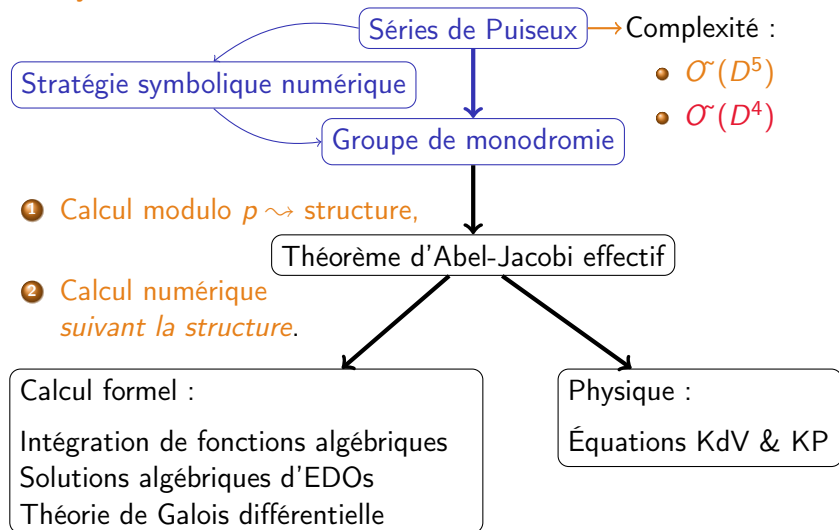
Luminy 2007 ; Luminy 2008

Previsouly, in JNCF



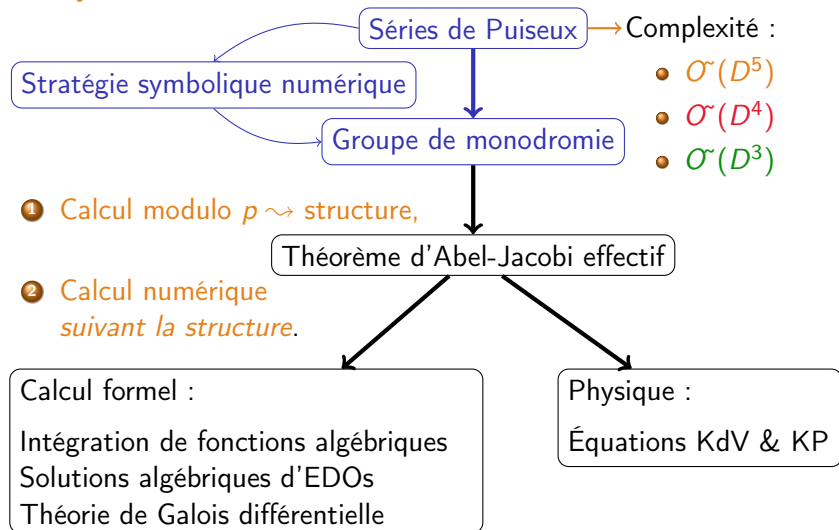
Luminy 2007 ; Luminy 2008

Previsouly, in JNCF



Luminy 2007 ; Luminy 2008 ; Cluny 2015

Previsouly, in JNCF



Luminy 2007 ; Luminy 2008 ; Cluny 2015 ; Aujourd'hui

Théorème (Puiseux, 1850)

$F \in \mathbb{K}[X][Y]$ possède d_Y racines distinctes dans $\overline{\mathbb{K}((X - x_0))}$:

$$Y_{ij}(X) = \sum_{k=n_i}^{\infty} \alpha_{i,k} \zeta_{e_i}^{jk} (X - x_0)^{\frac{k}{e_i}}$$

- $e_1, \dots, e_s \in \mathbb{N}^*$ et $d_Y = \sum_{i=1}^s e_i$
- $0 \leq j \leq e_i - 1, 1 \leq i \leq s,$
- $n_i \in \mathbb{Z}, \alpha_{i,n_i} \neq 0$
- ζ_{e_i} racine primitive de l'unité d'ordre e_i

De plus, $\{\alpha_{i,k}\}$ appartient à une extension finie de \mathbb{K} .

$$\overline{\mathbb{K}((X - x_0))} = \bigcup_{e \in \mathbb{N}^*} \overline{\mathbb{K}(((X - x_0)^{1/e}))}$$

Partie singulière

$$Y_{ij}(X) = \sum_{k=n_i}^{r_{ij}} \alpha_{ik} \zeta_{e_i}^{jk} X^{\frac{k}{e_i}} + \text{termes suivants}$$

r_{ij} est l'indice de régularité ; $r_i = r_{ij}$ pour $1 \leq j \leq e_i$

Termes suivants : calculés par exemple via Newton quadratique

Kung & Traub 1978 [All Algebraic Functions Can Be Computed Fast]

Exemple

$$F = \prod_{i=1}^3 (Y - S_i(X)) + X^{19} Y \text{ avec}$$

- $S_1 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 - X^{15/2} + \dots$
- $S_2 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^{15/2} + \dots$
- $S_3 = X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots$

Calcul d'une série de Puiseux : idée et outils

$$F(X, Y) = Y^6 + Y^5 X + 5 Y^4 X^3 - 2 Y^4 X + 4 Y^2 X^2 + X^5 - 3 X^4$$

$$\implies \text{But : } Y(X) = \alpha X^{\frac{m}{q}} + \dots \text{ s.t. } F(X, Y(X)) = 0$$

$$\begin{aligned} F(X, \alpha X^{\frac{m}{q}} + \dots) &= \alpha^6 X^{\frac{6m}{q}} + \alpha^5 X^{\frac{5m}{q}+1} + 5\alpha^4 X^{\frac{4m}{q}+3} \\ &\quad - 2\alpha^4 X^{\frac{4m}{q}+1} + 4\alpha^2 X^{\frac{2m}{q}+2} + X^5 - 3X^4 + \dots \end{aligned}$$

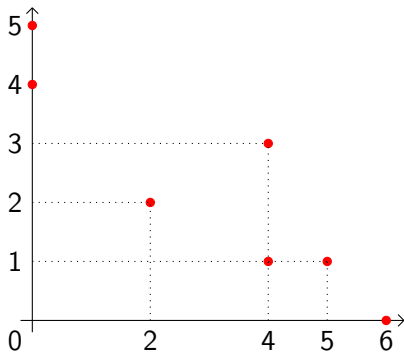
- On doit annuler au moins deux termes !

$$\implies (m, q) \text{ t.q. deux exposants soient identiques}$$

Support d'un polynôme

$$F(X, Y) = Y^6 X^0 + Y^5 X^1 + 5 Y^4 X^3 - 2 Y^4 X + 4 Y^2 X^2 + Y^0 X^5 - 3 Y^0 X^4$$

- $\text{Supp}(F) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$



Choix de (m, q) qui augmente l'ordre en X ?

$$F(X, Y) = Y^6 + Y^5X + 5Y^4X^3 - 2Y^4X + 4Y^2X^2 + X^5 - 3X^4$$

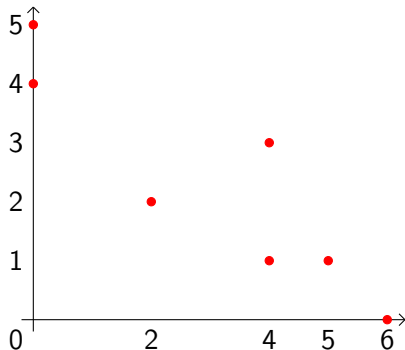
- $\text{Supp}(F) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$

- * (m, q) pour annuler deux termes ?

\rightsquigarrow au moins 2 points sur $mi + qj = l$

- * augmenter l'ordre en X ?

\rightsquigarrow pas d'autre point sous cette droite



Choix de (m, q) qui augmente l'ordre en X ?

$$F(X, Y) = Y^6 + Y^5X + 5Y^4X^3 - 2Y^4X + 4Y^2X^2 + X^5 - 3X^4$$

- $\text{Supp}(F) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$

- * (m, q) pour annuler deux termes ?

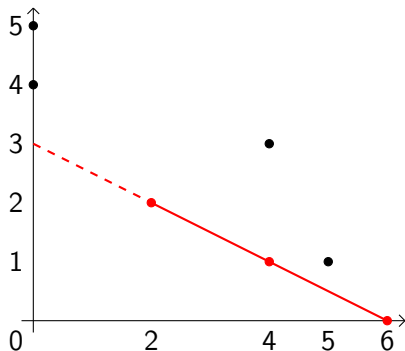
\leadsto au moins 2 points sur $mi + qj = l$

- * augmenter l'ordre en X ?

\leadsto pas d'autre point sous cette droite

(Δ_1) $i + 2j = 6$ est une telle droite

$\leadsto S(X) = \alpha X^{1/2} + \dots$



Choix de (m, q) qui augmente l'ordre en X ?

$$F(X, Y) = Y^6 + Y^5X + 5Y^4X^3 - 2Y^4X + 4Y^2X^2 + X^5 - 3X^4$$

- $\text{Supp}(F) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$

- * (m, q) pour annuler deux termes ?

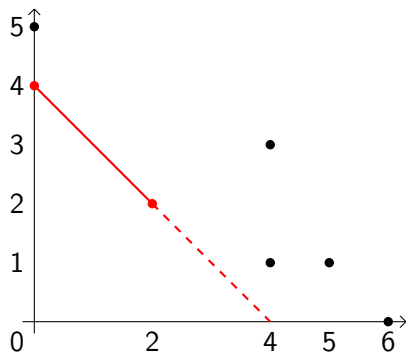
\leadsto au moins 2 points sur $mi + qj = l$

- * augmenter l'ordre en X ?

\leadsto pas d'autre point sous cette droite

$(\Delta_1) i + 2j = 6$ est une telle droite

$(\Delta_2) i + j = 4$ aussi

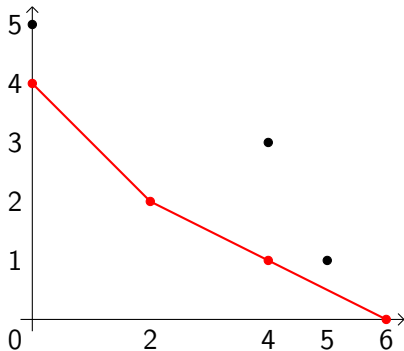


Polygone de Newton

$$F(X, Y) = Y^6 + Y^5X + 5Y^4X^3 - 2Y^4X + 4Y^2X^2 + X^5 - 3X^4$$

- $\text{Supp}(F) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$

— $\mathcal{N}(F)$: partie inférieure de l'enveloppe convexe de $\text{Supp}(F)$.



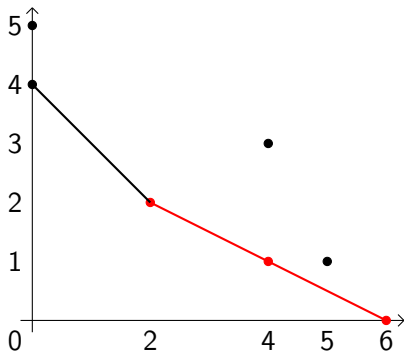
Choix de α qui augmente l'ordre en X ?

$$F(X, Y) = Y^6 + Y^5X + 5Y^4X^3 - 2Y^4X + 4Y^2X^2 + X^5 - 3X^4$$

- $\text{Supp}(F) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$

— $\mathcal{N}(F)$: partie inférieure de l'enveloppe convexe de $\text{Supp}(F)$.

$$F(T^2, \alpha T) = (\alpha^6 - 2\alpha^4 + 4\alpha^2) T^6 - 3T^8 + \alpha^5 T^7 + (5\alpha^4 + 1) T^{10} + \dots$$



Polynôme caractéristique

$$F(X, Y) = Y^6 + Y^5 X + 5 Y^4 X^3 - 2 Y^4 X + 4 Y^2 X^2 + X^5 - 3 X^4$$

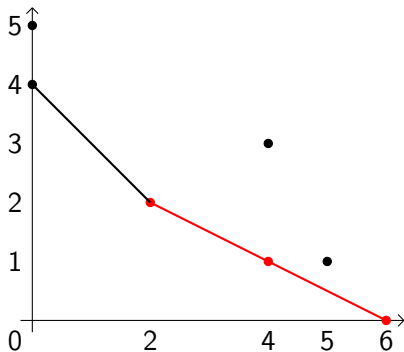
- $\text{Supp}(F) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$

— $\mathcal{N}(F)$: partie inférieure de l'enveloppe convexe de $\text{Supp}(F)$.

$$F(T^2, \alpha T) = (\alpha^6 - 2\alpha^4 + 4\alpha^2) T^6 - 3 T^8 + \alpha^5 T^7 + (5\alpha^4 + 1) T^{10} + \dots$$

Polynôme caractéristique :

$$\phi_{\Delta_1}(\beta) = \beta^2 - 2\beta + 4$$



Algorithme de Newton-Puiseux

Pour chaque arête Δ de $\mathcal{N}(F)$

1. Factoriser $\phi_{\Delta} = \prod_{k=1}^s \phi_k^{M_k}$

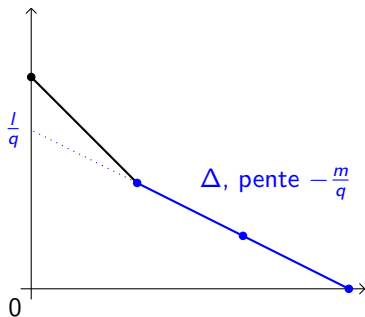
2. Pour chaque ϕ_k ,

transformation de Puiseux :

$$F_{\Delta, \xi}(X, Y) = \frac{F(X^q, X^m(Y + \xi^{\frac{1}{q}}))}{X^l}$$

avec ξ racine de ϕ_k .

3. Appels récursifs : $\{F_{\Delta, \xi}(X, Y)\}_{\Delta, \xi}$



Complexité arithmétique de l'algorithme de Newton-Puiseux

- D. Duval 1989 [Rational Puiseux Expansions] $\rightarrow (D^8)$
- calculs mod X^n , multiplication rapide $\rightarrow \mathcal{O}(D^5)$
Poteaux & Rybowicz [ISSAC 2008; AAEC 2011]
- moins d'appels récursifs (astuce + factorisation) $\rightarrow \mathcal{O}(D^4)$
Poteaux & Rybowicz [ISSAC 2015]
- Stratégie diviser pour régner $\rightarrow \mathcal{O}(D^3)$
Poteaux & Weimann [2018; arXiv 1708.09067]

Dans la suite : F unitaire ; factorisations univariées non comptées.

- Troncation modulo X^{n+1} ; $n = v_F = v_X(\text{Disc}_Y(F))$,
- Une transformation de Puiseux = n shifts univariés $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
- Total : #termes $\leq v_F$ $\mathcal{O}(v_F^2 d_Y)$
- Séries de Puiseux au-dessus de 0 $\mathcal{O}(D^5)$
- tous les points critiques $\mathcal{O}(D^5)$

S.S. Abhyankar [Newton's theorem]

Hyp : F unitaire.

- $F_1(X, Y) = F(X, Y + A_{d_Y-1}(X)/d_Y) = Y^{d_Y} + \sum_{k=0}^{d_Y-2} B_k(X) Y^k$
- On ne peut avoir $\mathcal{N}(F_1) = \Delta$, $q = 1$ et $\phi_\Delta(T) = (T - \xi)^{d_Y}$

\implies nombre d'étapes en $O(\rho \log(d_Y))$.

$$S_1 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 - X^{15/2}$$

$$S_2 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^{15/2}$$

$$S_3 = X + X^2 + X^3 + X^4$$

S.S. Abhyankar [Newton's theorem]

Hyp : F unitaire.

- $F_1(X, Y) = F(X, Y + A_{d_Y-1}(X)/d_Y) = Y^{d_Y} + \sum_{k=0}^{d_Y-2} B_k(X) Y^k$
- On ne peut avoir $\mathcal{N}(F_1) = \Delta$, $q = 1$ et $\phi_\Delta(T) = (T - \xi)^{d_Y}$

\implies nombre d'étapes en $O(\rho \log(d_Y))$.

$$S_1 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 - X^{15/2}$$

$$S_2 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^{15/2}$$

$$S_3 = X + X^2 + X^3 + X^4$$

S.S. Abhyankar [Newton's theorem]

Hyp : F unitaire.

- $F_1(X, Y) = F(X, Y + A_{d_Y-1}(X)/d_Y) = Y^{d_Y} + \sum_{k=0}^{d_Y-2} B_k(X) Y^k$
- On ne peut avoir $\mathcal{N}(F_1) = \Delta$, $q = 1$ et $\phi_\Delta(T) = (T - \xi)^{d_Y}$

\implies nombre d'étapes en $O(\rho \log(d_Y))$.

$$S_1 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 - X^{15/2}$$

$$S_2 = X + X^2 + X^3 + 17X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^{15/2}$$

$$S_3 = X + X^2 + X^3 + X^4$$

Théorème de préparation de Weierstrass.

$$F_2 = \frac{F_1(X^q, X^m(Y + \xi^{\frac{1}{q}}))}{X^l}$$

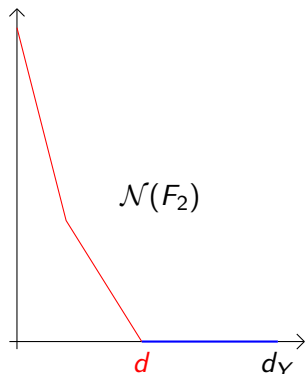
- $F_2(0, Y) = Y^d p(Y)$ avec $p(0) \neq 0$,
- Lemme de Hensel :

$$F_2 = F_3 P \text{ dans } \mathbb{K}[[X]][[Y]] \text{ avec :}$$

- F_3 unitaire en Y ,
- $F_3(0, Y) = Y^d$,
- $P(0, Y) = p(Y)$.

- Idée :
 - 1 Lemme de Hensel modulo X^{n+1} ,
 - 2 Appels récursifs avec $F_3(X, Y)$.

- Complexité : $\mathcal{O}(d_Y n)$



$$s_k = \#\{(\Delta, \xi)\}$$

- ① astuce d'Abhyankar : shift bivarié $\tilde{O}(n d_Y)$
- ② Puiseux-shift : un par (Δ, ξ) $s_k \tilde{O}(n d_Y)$
- ③ Théorème de préparation de Weierstrass $s_k \tilde{O}(n d_Y)$
- ④ Appels récursifs.
- Total : $\sum_k s_k \in O(\rho \log(dy))$ $\tilde{O}(\rho n d_Y)$
- $n = v_F (= v_X(\text{Disc}_Y(F)))$ $\tilde{O}(\rho v_F d_Y) \subset \tilde{O}(D^4)$

Un algorithme diviser pour régner (F unitaire)

① $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries,

$\mathcal{O}(v_F d_Y)$

Un algorithme diviser pour régner (F unitaire)

① $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries,

$\mathcal{O}(v_F d_Y)$

- G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
- $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,

Un algorithme diviser pour régner (F unitaire)

- ① $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
- G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
- ② $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$,
- Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$

Un algorithme diviser pour régner (F unitaire)

- ① $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
- G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
- ② $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$, $\mathcal{O}(v_F)$
- Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$
 - On prouve $k \in (v_F/d_Y)$,

Un algorithme diviser pour régner (F unitaire)

- 1 $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
- 2 $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$, $\mathcal{O}(v_F)$
 - Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$
 - On prouve $k \in (v_F/d_Y)$,
- 3 Adaptation Hensel $\rightsquigarrow F = G \cdot H$ modulo X^{v_F+1} , $\mathcal{O}(v_F d_Y)$

Un algorithme diviser pour régner (F unitaire)

- 1 $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
- 2 $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$, $\mathcal{O}(v_F)$
 - Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$
 - On prouve $k \in (v_F/d_Y)$,
- 3 Adaptation Hensel $\rightsquigarrow F = G \cdot H$ modulo X^{v_F+1} , $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
- 4 Appel récursif pour H $2 \times \mathcal{O}(v_F d_Y)$

Un algorithme diviser pour régner (F unitaire)

- 1 $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
 - 2 $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$, $\mathcal{O}(v_F)$
 - Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$
 - On prouve $k \in (v_F/d_Y)$,
 - 3 Adaptation Hensel $\rightsquigarrow F = G \cdot H$ modulo X^{v_F+1} , $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - 4 Appel récursif pour H $2 \times \mathcal{O}(v_F d_Y)$
- Pas de factorisation univariée ? D5 [Dahan-Schost-Maza-Wu-Xie05](#)

Un algorithme diviser pour régner $v_F = v_X(\text{Res}_Y(F, F_Y))$

- 1 $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
- 2 $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$, $\mathcal{O}(v_F)$
 - Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$
 - On prouve $k \in (v_F/d_Y)$,
- 3 Adaptation Hensel $\rightsquigarrow F = G \cdot H$ modulo X^{v_F+1} , $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
- 4 Appel récursif pour H $2 \times \mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - Pas de factorisation univariée? D5 [Dahan-Schost-Maza-Wu-Xie05](#)
 - Cas non unitaire : $F = u F_0 F_\infty \bmod X^{v_F+1}$ $\mathcal{O}(v_F d_Y)$

Un algorithme diviser pour régner $v_F = v_X(\text{Res}_Y(F, F_Y))$

- 1 $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
- 2 $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$, $\mathcal{O}(v_F)$
 - Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$
 - On prouve $k \in (v_F/d_Y)$,
- 3 Adaptation Hensel $\rightsquigarrow F = G \cdot H$ modulo X^{v_F+1} , $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
- 4 Appel récursif pour H $2 \times \mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - Pas de factorisation univariée? D5 [Dahan-Schost-Maza-Wu-Xie05](#)
 - Cas non unitaire : $F = u F_0 F_\infty \bmod X^{v_F+1}$ $\mathcal{O}(v_F d_Y)$

Total : $\mathcal{O}(v_F d_Y) \subset \mathcal{O}(D^3)$

Un algorithme diviser pour régner $v_F = v_X(\text{Res}_Y(F, F_Y))$

- 1 $n \in (v_F/d_Y) \rightsquigarrow$ la moitié des séries, $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - G facteur de $F \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$; $d_Y(G) \geq d_Y/2$,
 - $H = F/G \bmod X^{O(v_F/d_Y)}$,
- 2 $U G + V H = X^k$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$, $\mathcal{O}(v_F)$
 - Moroz-Schost [ISSAC'16] : $\mathcal{O}(d_Y k)$
 - On prouve $k \in (v_F/d_Y)$,
- 3 Adaptation Hensel $\rightsquigarrow F = G \cdot H$ modulo X^{v_F+1} , $\mathcal{O}(v_F d_Y)$
- 4 Appel récursif pour H $2 \times \mathcal{O}(v_F d_Y)$
 - Pas de factorisation univariée? D5 [Dahan-Schost-Maza-Wu-Xie05](#)
 - Cas non unitaire : $F = u F_0 F_\infty \bmod X^{v_F+1}$ $\mathcal{O}(v_F d_Y)$

Total : $\mathcal{O}(v_F d_Y) \subset \mathcal{O}(D^3)$

Tous les points critiques : $\mathcal{O}(D^3)$

Une limite atteinte ?

MAJ troncation : $n_1 = qn - l$ d'où

$\mathcal{O}(n_1 d_Y) \subset \mathcal{O}(v d_Y)$; pas $\mathcal{O}(\rho v)$

$X \leftarrow X^q \rightsquigarrow$ on a pas $\mathcal{O}(\rho v)$

\implies Irréductibilité pas en $\mathcal{O}(D^2)$

Une limite atteinte ?

MAJ troncation : $n_1 = qn - l$ d'où

$\mathcal{O}(n_1 d_Y) \subset \mathcal{O}(v d_Y)$; pas $\mathcal{O}(\rho v)$

$X \leftarrow X^q \rightsquigarrow$ on a pas $\mathcal{O}(\rho v)$

\implies Irréductibilité pas en $\mathcal{O}(D^2)$

Abhyankar / Montes / MacLane

Kuo : irréductibilité sans $X \leftarrow X^q$?

Abhyankar : oui. ϕ t.q. $F \simeq \phi^e$

Décomposition ϕ -adique

« Valuation augmentée »

Polygone de Newton généralisé

\implies Irréductibilité en $\mathcal{O}(D^2)$?

Une limite atteinte ?

MAJ troncation : $n_1 = qn - l$ d'où

$\mathcal{O}(n_1 d_Y) \subset \mathcal{O}(v d_Y)$; pas $\mathcal{O}(\rho v)$

$X \leftarrow X^q \rightsquigarrow$ on a pas $\mathcal{O}(\rho v)$

\implies Irréductibilité pas en $\mathcal{O}(D^2)$

Abhyankar / Montes / MacLane

Kuo : irréductibilité sans $X \leftarrow X^q$?

Abhyankar : oui. ϕ t.q. $F \simeq \phi^e$

Décomposition ϕ -adique

« Valuation augmentée »

Polygone de Newton généralisé

\implies Irréductibilité en $\mathcal{O}(D^2)$?

Factorisation selon les pentes

Caruso, Roe, Vaccon [ISSAC 2016]

A un polynôme de facette, $V=1$

Itération de Newton :

$$A = A + (F V \% A)$$

$$B = F // A$$

$$V = (2 V + V^2 B) \% A$$

OK avec les polygones généralisés ?

Une limite atteinte ?

MAJ troncation : $n_1 = qn - l$ d'où

$\mathcal{O}(n_1 d_Y) \subset \mathcal{O}(v d_Y)$; pas $\mathcal{O}(\rho v)$

$X \leftarrow X^q \rightsquigarrow$ on a pas $\mathcal{O}(\rho v)$

\implies Irréductibilité pas en $\mathcal{O}(D^2)$

Abhyankar / Montes / MacLane

Kuo : irréductibilité sans $X \leftarrow X^q$?

Abhyankar : oui. ϕ t.q. $F \simeq \phi^e$

Décomposition ϕ -adique

« Valuation augmentée »

Polygone de Newton généralisé

\implies Irréductibilité en $\mathcal{O}(D^2)$?

Factorisation selon les pentes

Caruso, Roe, Vaccon [ISSAC 2016]

A un polynôme de facette, $V=1$

Itération de Newton :

$$A = A + (F \% A)$$

$$B = F // A$$

$$V = (2V + V^2 B) \% A$$

OK avec les polygones généralisés ?

N'améliore pas le cas général

La moitié des séries en $\mathcal{O}(\rho v)$

$F = G \cdot H$ reste en $\mathcal{O}(d_Y v)$

D'autres idées ?

Challenge : résultant bivarié.