feuille numéro 11

2 décembre 2018

Exercice 1
Combien de fois doit-on lancer le même dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 afin d'obtenir la même face

Q 1.1 au moins deux fois ?

Q 1.2 au moins trois fois ?

Q 1.3 au moins n fois pour $n \geq 4$?

Exercice 2

Q 2.1 Étant donné huit livres sur le langage Pascal, dix-sept sur le langage Ada, six livres sur le langage Python, douze livres sur ocaml, et vingt livres sur le langage Prolog, combien faut-il prendre de livres pour être certain d'avoir au moins dix livres qui traitent du même langage ?

Exercice 3

Q 3.1 Un auditorium a une capacité de 800 places. Combien de sièges doivent être occupés pour garantir que deux personnes au moins ont les mêmes deux initiales (initiale du prénom et initiale du nom) ?

Exercice 4
a et b désignent des entiers. On rappelle que a et b sont dit premiers entre eux si et seulement si le plus grand diviseur commun à a et b est 1. On peut démontrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple d'entiers u et v tel que $au + bv = 1$.

Q 4.1 Montrez que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Q 4.2 prouvez que parmi 101 entiers choisis dans l'intervalle entier $[\![1, 200]\!]$ il existe toujours un couple d'entiers premiers entre eux ..

Q 4.3 Est-ce que cela reste vrai si on remplace 101 par 100 ?

Exercice 5

Q 5.1 Si onze entiers sont choisis entre 1 et 100, montrez qu'il y en a deux au moins deux –notons les x et y– tel que

$$0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} < 1$$

Exercice 6

Q 6.1 Soit S une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal au moins 3. Prouvez qu'il existe deux éléments x,y de S tels que $x + y$ soit pair.

Q 6.2 On considère maintenant une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Quel est le nombre minimal d'éléments de S permettant de garantir l'existence de (x_1, x_2) et (y_1, y_2), deux éléments de S, tels que les deux sommes $(x_1 + y_1)$ et $(x_2 + y_2)$ soient paires.

Q 6.3 On considère une famille S de points du plan dont les coordonnées sont entières (toutes les deux !). Combien faut-il de points au minimum dans S pour être sûr qu'il existe un segment dont le milieu soit aussi à coordonnées entières ?

Q 6.4 Soit n un entier naturel non nul. On considère maintenant une partie de $\mathbb{N}^n$. Quel est le nombre minimal d'éléments de S permettant de garantir l'existence de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ deux éléments de S telles que les n sommes $(x_1 + y_1)$ et $(x_2 + y_2)$, ... , $(x_n + y_n)$ soient paires ?