feuille numéro 10

2 décembre 2018

Exercice 1

A est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

Q 1.1 Donnez un exemple de relation $\mathcal{R}$ sur A qui est :

Q 1.1.1 réflexive, symétrique, mais pas transitive

Q 1.1.2 réflexive, transitive, mais pas symétrique

Q 1.1.3 symétrique, transitive mais pas réflexive.

Exercice 2

Q 2.1 Écrire les définitions de réflexivité, symétrie, transitivité, antisymétrie en utilisant des quantificateurs.

Q 2.2 Utiliser la question précédente pour préciser à quelle condition une relation binaire sur un ensemble A :

Q 2.2.1 n'est pas réflexive,

Q 2.2.2 n'est pas symétrique,

Q 2.2.3 n'est pas transitive,

Q 2.2.4 n'est pas antisymétrique.

Exercice 3

Q 3.1 Pour chacune des relations, determinez si la relation est réflexive, symétrique, transitive ou antisymétrique.

Q 3.1.1 Dans $\mathbb{N}$, on définit $a|b$ si par définition il existe un entier naturel q tel que $b = aq$

Q 3.1.2 Dans $\mathbb{Z}$, on définit $a|b$ si par définition il existe un entier relatif q tel que $b = aq$

Q 3.1.3 On se donne $\mathcal{U}$ et $C \subset \mathcal{U}$ On définit sur $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, $A\mathcal{R}B$ si $A \cap C = B \cap C$

Q 3.1.4 E est l'ensemble des droites du plan. on dit que $d_1\mathcal{R}d_2$ si d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

Q 3.1.5 $\mathcal{R}$ est la relation sur $\mathbb{Z}$ telle que $x\mathcal{R}y$ si par définition $x + y$ est pair

Q 3.1.6 $\mathcal{R}$ est la relation sur $\mathbb{Z}$ telle que $x\mathcal{R}y$ si par définition $x + y$ est impair

Q 3.1.7 $\mathcal{R}$ est la relation sur $\mathbb{N}$ telle que $x\mathcal{R}y$ si par définition $pgcd(x, y) = 1$

Q 3.1.8 T désigne l'ensemble des triangles du plan, on définit sur T la relation $t_1\mathcal{R}t_2$ si par définition les deux triangles ont un angle de même mesure.

Q 3.1.9 $\mathcal{R}$ est la relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ où $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si $a \leq c$.

Exercice 4

soit E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On appelle *graphe* de la relation $\mathcal{R}$ l'ensemble des couples (x, y) de $E \times E$ tels que $x\mathcal{R}y$.

Q 4.1 Montrez que l'application de l'ensemble des relations binaires sur E qui, à une relation associe son graphe, est une bijection.

Q 4.2 En déduire le nombre de relations binaires sur un ensemble fini E à n éléments.

Exercice 5

Soit $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations binaires sur un ensemble A, G_1 et G_2 leur graphe respectif, soit $G = G_1 \cap G_2$ soit $\mathcal{R}$ la relation associée à G

Q 5.1 Prouvez ou réfutez "$\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont reflexives implique $\mathcal{R}$ est reflexive"

Q 5.2 Reprendre la question précédente en remplaçant réflexive par respectivement symétrique, transitive, antisymétrique

Exercice 6

Q 6.1 Où se cache l'erreur ? Soit A un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive alors $\mathcal{R}$ est reflexive. Preuve : soit $x\mathcal{R}y$, comme $\mathcal{R}$ est symétrique $y\mathcal{R}x$, mais comme par ailleurs on sait que $\mathcal{R}$ est transitive, on a alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ donc $x\mathcal{R}x$ ce qui prouve que $\mathcal{R}$ est réflexive.