

Mathématiques Discrètes

feuille numéro 05

4 octobre 2018

Exercice 1

Un marchand de glaces, propose 31 parfums différents.

Q 1.1 De combien de manières, peut-on commander une douzaine de cornets de glaces, si

Q 1.1.1 on ne veut pas commander deux fois le même parfum ?

Q 1.1.2 on peut commander jusqu'à douze fois le même parfum ?

Q 1.1.3 on ne peut pas commander plus de onze fois un même parfum ?

Q 1.1.4 plus de la moitié des cornets doivent être au chocolat ?

Exercice 2

Q 2.1 Déterminez le cardinal de l'ensemble des solutions de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ avec x_1, x_2, x_3, x_4 entiers où

Q 2.1.1 $x_i \geq 0$ pour tout i compris entre 1 et 4.

Q 2.1.2 $x_i > 0$ pour tout i compris entre 1 et 4.

Q 2.1.3 $x_1 \geq 5, x_2 \geq 5, x_3 \geq 7, x_4 \geq 7$.

Q 2.1.4 $x_i \geq 8$ pour tout i compris entre 1 et 4.

Q 2.1.5 $x_i \geq -2$ pour tout i compris entre 1 et 4.

Q 2.1.6 $x_i > 0$ pour tout i compris entre 1 et 3, et $0 < x_4 \leq 25$.

Exercice 3

Q 3.1 Trouvez le coefficient de v^2w^4xz dans le développement de $(3v + 2w + x + y + z)^8$.

Q 3.2 Combien de termes différents apparaissent dans le développement de la première question ?

Exercice 4

Q 4.1 Quel est le nombre d'entiers n de $\llbracket 1, 2000 \rrbracket$ tels que

Q 4.1.1 n n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5 ?

Q 4.1.2 n n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5 ni par 7 ?

Q 4.1.3 n n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5 mais divisible par 7 ?

Exercice 5

Q 5.1 Trouvez combien l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

possède de solutions entières dans les cas suivants :

Q 5.1.1 $0 \leq x_i$ pour i dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Q 5.1.2 $0 \leq x_i < 8$ pour i dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Q 5.1.3 $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 3 \leq x_3 \leq 7, 3 \leq x_4 \leq 8$

Exercice 6

On lance 8 dés à six faces numérotées de 1 à 6, de couleurs respectives rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet et noir. On s'intéresse aux mots formés par les résultats des dés, en respectant l'ordre des couleurs précédemment citées.

Q 6.1 Combien de résultats sont possibles ?

Q 6.2 Parmi les résultats précédents, dans combien de cas les 6 faces de 1 à 6 ont été obtenues.

Par exemple : si le tirage est $(1, 4, 1, 3, 2, 5, 6, 1)$, alors tous les numéros de 1 à 6 ont bien été obtenus. En revanche, dans le tirage $(1, 1, 1, 4, 4, 4, 2, 2)$, il manque le 3 le 5 et le 6.

Exercice 7

Q 7.1 De combien de manières trois x trois y et trois z peuvent être arrangés pour qu'il n'y ait jamais trois fois consécutivement la même lettre.

Exercice 8

Lors d'un cycle de 12 semaines de cours intensifs de Mathématiques, Gudule a rencontré sept amies. Pendant ce cours,

- elle a déjeuné 35 fois avec chacun de ses amis,
- elle a rencontré chaque paire seize fois,
- elle a rencontré chaque trio huit fois,
- elle a rencontré chaque quatuor quatre fois,
- elle a rencontré chaque ensemble de cinq deux fois,
- elle a rencontré chaque ensemble de six une fois,
- jamais elle n'a déjeuné avec ses sept amies rassemblées.

Q 8.1 A-t-elle pris l'un des $84 = 12 \times 7$ repas seule ?

Q 8.2 Suggestion d'exercice de programmation. Lors de ces 84 repas Gudule a noté les noms de ses amies sur son agenda à la page du jour. Réalisez un programme qui affiche une réalisation possible de son agenda (les amies de Gudule se prénomment Gisele, Germaine, Gertrude, Gudrun, Georgette, Geraldine, Gaëlle).

Exercice 9

Madame Dussiflard a huit petits enfants. Chacun d'eux raffole de crème glacée. Dans son congélateur elle a suffisamment de crème pour 6 boules de glace à la vanille, 3 boules de glaces au chocolat, 6 boules de glace à la fraise, et 5 boules de glace au café. Lors de son anniversaire, l'ensemble de ses petits enfants est venu lui rendre visite. Le plus âgé de ses petits enfants prend la commande des plus jeunes. Chaque enfant a le droit à une boule du parfum de son choix. Parmi toutes les demandes possibles, certaines vont embarrasser Madame Dussiflard, car elle n'aura pas assez de l'un au moins des parfums.

Q 9.1 Combien y a-t-il de commandes embarrassantes pour Madame Dussiflard ?

Exercice 10

Sur les deux mille dix sept élèves d'une école,

- seize ont exactement un frère ou une sœur dans cette école,
- douze en ont exactement deux,
- huit en ont exactement trois,
- et cinq exactement quatre ;
- les autres n'ont pas de frères et sœurs dans cette école.

Q 10.1 Combien de familles ont au moins un enfant dans cette école ?

source : calendrier des mathématiques 2017 à la date du 31 janvier.