Mathématiques Discrètes

feuille numéro 04

25 septembre 2018

Exercice 1

Q 1.1 n désigne un entier naturel. Prouvez l'égalité suivante par le calcul et en utilisant un argument combinatoire :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Q 1.2

n désigne un entier naturel non nul. Prouvez l'égalité suivante par le calcul :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$$

Exercice 2

Q 2.1 Déterminez le coefficient de x^9y^3 dans

Q 2.1.1 $(x+y)^{12}$.

Q 2.1.2 $(x+2y)^{12}$.

Q 2.1.3 $(2x-3y)^{12}$.

Exercice 3

Une photocopieuse est à accès restreint. Il est nécessaire de composer un code de 4 chiffres de 0 à 9 pour pouvoir l'utiliser.

Q 3.1 Combien de codes sont possibles ?

Toutefois lorsqu'on examine soigneusement le clavier, on s'aperçoit que seules trois touches sont sales, la touche 4, la touche 3 et la touche 7. Si on est très observateur, on remarque même que la touche 4 est beaucoup plus sale que la touche 3 et la touche 7.

Q 3.2 Combien y a-t-il de codes qui contiennent deux fois le 4 , une fois le 3 et une fois le 7 ?

Q 3.3 L'observation à la dérobée d'un utilisateur de la photocopieuse, permet de savoir que le même chiffre n'est pas utilisé deux fois consécutivement. Combien y a-t-il de codes qui contiennent deux fois le 4, une fois le 3 et une fois le 7, et tel que le 4 n'est pas deux fois de suite.

Exercice 4

Q 4.1 Montrez que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}.$$

Exercice 5

Q 5.1 Si n est un entier positif, que vaut :

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^k\binom{n}{k} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$$

Exercice 6

Dans un groupe de 10 étudiants présents, on fait passer une feuille de pointage sur laquelle ils inscrivent leurs noms les uns après les autres.

Q 6.1

Combien de feuilles différentes peut-on obtenir ?

On souhaite répartir les étudiants en binôme. Une méthode consiste, en partant d'une feuille de pointage, à former les binômes en regroupant l'étudiant de rang $2i+1$ avec celui de rang $2i+2$, i variant de 0 à 4, étant entendu que le rang du premier étudiant sur la feuille vaut 1.

Une même répartition en binôme peut être obtenue de plusieurs manières différentes. Par exemple avec les deux feuilles de pointages $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ et $(d, c, b, a, e, f, i, j, h, g)$ on obtient la même répartition en binômes :

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}, \{i, j\}\}$$

Q 6.2 Pour une répartition donnée, combien de feuilles de pointage donnent cette répartition ?

Q 6.3 En déduire le nombre de manières de répartir 10 étudiants en binôme.

Q 6.4 Généralisez à un groupe de $2n$ étudiants, $n \in \mathbb{N}$.

Q 6.5 Donnez une expression pour la quantité suivante :

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (2i+1)$$

Exercice 7

Prouvez l'égalité suivante par le calcul et en utilisant un argument combinatoire :

Q 7.1

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_t} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-n_2\ldots-n_{t-1}}{n_t}.$$