fini-dénombrable-monstrueux

4 décembre 2018

Université de Lille

admis

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.
si E est un ensemble infini alors il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E.

Un phénomène étrange

si E est un ensemble fini, si A est une partie de E différente de E (on dit une partie propre de E). Alors il n'existe pas de bijection entre A et E.

propriété

si E est un ensemble infini, alors il existe A une partie propre de E telle que A et E soient en bijection.
Cette propriété caractérise les ensembles infinis.

exemple

l'ensemble des entiers pairs $2\mathbb{N}$ est infini, c'est une partie de $\mathbb{N}$.
On peut construire une bijection entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$

Dénombrable

définition

On dit que E est *dénombrable* si par définition il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.

exemples

- $2\mathbb{N}$ est dénombrable.
- l'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
- de manière générale si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$ alors A est dénombrable.

exemple

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

au plus dénombrable

Pour faciliter les énoncés de certains théorème, on donne un sens à la locution : "être au plus dénombrable".

définition

On dit qu'un ensemble E est *au plus dénombrable* si par définition ou bien E est fini, ou bien E est dénombrable.

Comment montrer qu'un ensemble E est au plus dénombrable ?

. Il suffit de montrer qu'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ ou bien d'un ensemble dénombrable sur E, ou alors qu'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$ ou dans un ensemble dénombrable.

l'hotel d'Hilbert

Il s'agit d'un hotel qui possède une infinité de chambre. Chaque chambre est numérotée par un nombre entier. Le receptionniste de l'hotel, peut communiquer des consignes aux pensionnaires.

Problème 1

L'hotel est plein, c'est-à-dire que chaque chambre est occupée. Un touriste arrive. Il souhaite avoir une chambre. Que fait le receptionniste ?

Problème 2

Juste en face de l'hotel d'Hilbert, un autre hotel B de la même nature a un problème. Il n'y a plus de chauffage. Tous les pensionnaires de l'hotel B veulent déménager dans l'hotel d'Hilbert. Que fait le receptionniste ?

Problème 2

Juste en face de l'hotel d'Hilbert, un autre hotel B de la même nature a un problème. Il n'y a plus de chauffage. Tous les pensionnaires de l'hotel B veulent déménager dans l'hotel d'Hilbert. Que fait le receptionniste ?

Théorème

La réunion de deux ensembles (au plus) dénombrable est (au plus)dénombrable.

Problème 3

Une compagnie de bus est équipée d'une technologie révolutionnaire. Elle est pourvue de bus de Hilbert. Elle en possède une infinité dénombrable. Tous les bus arrivent devant l'hotel d'Hilbert. Les bus sont complétement pleins. Les voyageurs veulent passer une nuit dans l'hotel d'Hilbert. Que fait le receptionniste ?

Problème 3

Une compagnie de bus est équipée d'une technologie révolutionnaire. Elle est pourvue de bus de Hilbert. Elle en possède une infinité dénombrable. Tous les bus arrivent devant l'hotel d'Hilbert. Les bus sont complétement pleins. Les voyageurs veulent passer une nuit dans l'hotel d'Hilbert. Que fait le receptionniste ?

Théorème

Une réunion d'une famille (au plus) dénombrable d'ensemble (au plus) dénombrables est (au plus) dénombrable.

et plus gros ?

Existe-t-il des ensembles "plus gros", c'est à dire trop "gros" pour être dénombrable.

Théorème

E est un ensemble. Il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Cela implique que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ne sont donc pas dénombrables.

comme l'ensemble des programmes python est dénombrable, il existe des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui ne sont pas programmables.

un autre exemple :
l'intervalle des nombres réels compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable.

Preuve

si les nombres de l'intervalle $[0, 1[$ étaient dénombrables. on pourrait les lister tous...

Les r_n sont les réels, et $r_{n,k}$ est un chiffre décimal, c'est-à-dire on a

$$r_n = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k} 10^{-k-1}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
r_0 & = & 0, & r_{0,0} & r_{0,1} & r_{0,2} & \dots & r_{0,n} & \dots \\
r_1 & = & 0, & r_{1,0} & r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} & \dots \\
r_2 & = & 0, & r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,n} & \dots \\
\vdots & = & & & & & & & \\
r_n & = & 0, & r_{n,0} & r_{n,1} & r_{n,2} & \dots & r_{n,n} & \dots \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Le nombre a définit par $a_k = 1$ si $r_{k,k} \neq 1$ et $a_k = 2$ sinon. $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k-1}$. et un réel de $[0, 1[$ et ne peut pas être dans la liste.

Le procédé utilisé dans la preuve est très souvent utilisé en informatique théorique. Il s'appelle procédé diagonal.

exercice : dénombrable ou pas dénombrable :

- les polynômes en une indeterminée X sur $\mathbb{Q}$
- les fractions rationnelles en une indeterminée X sur $\mathbb{Q}$
- l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$