Relations binaires

27 novembre 2018

Université de Lille

table des matières

Relation binaire

Définition

E désigne un ensemble. On appelle relation $\mathcal{R}$ binaire sur E toute application de $E \times E$ dans l'ensemble des booléens $\{Vrai, Faux\}$.

Notation

Plutôt que de noter $\mathcal{R}(x, y)$, adopte une notation *infixée* et on note $x\mathcal{R}y$.

exemple de relation binaire

E est l'ensemble des gens présents dans l'amphi. On peut définir une relation par : $x\mathcal{R}_1 y$ si par définition x est de la même taille que y

E est l'ensemble des gens présents dans l'amphi qui possèdent un téléphone portable. On peut définir une relation par : $x\mathcal{R}_2 y$ si par définition les 6 derniers chiffres du numéro de téléphone du portable de x possède un chiffre commun avec les 6 derniers chiffres du numéro de téléphone de y.

E est l'ensemble des gens présents dans l'amphi. On peut définir une relation par : $x\mathcal{R}_3 y$ si par définition taille de x est strictement inférieur à la taille de y

Réflexivité

on dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est réflexive si

$$\forall x \in E \qquad x\mathcal{R}x$$

Symétrie

définition

on dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est symetrique si

$$\forall (x, y) \in E \times E \qquad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$$

Anti-symétrie

définition

on dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est antisymetrique si

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$$

Transitivité

définition

on dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est transitive si

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E \qquad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

Relation d'équivalence

Définition

On appelle relation d'équivalence toute relation binaire sur un ensemble E qui satisfait les trois propriétés

- reflexivité,
- symétrie,
- transitivité.

exemple

$\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

$\mathcal{R}_2$,$\mathcal{R}_3$ ne sont pas des relations d'équivalences.

soit k un entier naturel non nul, $E = \mathbb{Z}$, et $x =_k y$ si par définition $x - y$ est divisible par k

n est un entier naturel. E est l'ensemble des parties de l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$. $X\mathcal{R}Y$ si par définition X possède le même nombre d'éléments que Y

Quantificateur existentiel

on note $\exists$ le quantificateur qui permet d'exprimer l'existence.

$$\exists x \in E \quad p(x)$$

signifie qu'on peut trouver un élément x dans l'ensemble E satisfaisant la propriété $p(x)$

Quantificateur universel

on note $\forall$ le quantificateur qui permet d'exprimer l'universalité.

$$\forall x \in E \quad p(x)$$

signifie que tous les éléments x de l'ensemble E satisfont la propriété $p(x)$

négation du quantificateur existentiel

$$\neg(\exists x \in E \quad p(x))$$

signifie qu'on ne peut pas trouver un élément x dans l'ensemble E qui satisfait la propriété $p(x)$. C'est à dire que pour tous les éléments x de E, la propriété $\neg p(x)$ est vérifiée

$$\forall x \in E \quad \neg(p(x))$$

négation du quantificateur universel

$$\neg(\forall x \in E \quad p(x))$$

signifie qu'on peut trouver un élément x dans l'ensemble E qui ne satisfait pas la propriété $p(x)$.

$$\exists x \in E \quad \neg(p(x))$$

l'implication et sa négation

table de vérité de l'implication et de sa négation

a	b	$a \Longrightarrow b$	$\neg(a \Longrightarrow b)$
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	F

$$(\neg(a \Longrightarrow b)) \Longleftrightarrow (a \wedge \neg b)$$

À quoi cela sert-il ?

- Regrouper en classes des éléments qui ont une propriété commune,
- Partitionner un ensemble,
- Définir un nouvel ensemble.

classe d'équivalence

$(E, \mathcal{R})$ est un ensemble muni d'une relation d'équivalence. x désigne un élément de E.

définition

On appelle classe d'équivalence de x la partie de E constituée de tous les éléments qui sont en relation avec x. On note cet ensemble $C(x)$.

Propriétés

- $C(x)$ est non vide.
- si x est en relation avec y alors les classes d'équivalences de x et de y sont égales.
- si x et y ne sont pas en relation alors les classes d'équivalences de x et de y sont disjointes. (cela signifie que leur intersection est vide)

Ensemble quotient

$(E, \mathcal{R})$ est un ensemble muni d'une relation d'équivalence.

définition

On appelle ensemble quotient l'ensemble des classes d'équivalences.On note $E/\mathcal{R}$ cet ensemble.

$(E, \mathcal{R})$ est un ensemble muni d'une relation d'équivalence.

Définition

on appelle système complet de représentant, toute partie S de E telle que pour tout élément x de E on puisse trouver un unique élément y de S tels que x et y soit en relation

$$\forall x \in E \exists ! y \in S \quad x \mathcal{R} y$$

On admet la propriété suivante :

Propriété

On peut choisir un système complet de représentant.

E est un ensemble, J un ensemble d'indices. A_j une famille de partie de E indicée par les éléments de J

Définition

On dit que $(A_j)_{j\in J}$ forme une partition de E si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- l'ensemble E est égal à la réunion des A_j pour j décrivant l'ensemble J
- les A_j sont deux à deux disjoints. (cela signifie pour tout couple d'indice (j,k), si j est différent de k alors A_j et A_k n'ont pas d'éléments communs)

propriété

$(E,\mathcal{R})$ est un ensemble muni d'une relation d'équivalence. S un système complet de représentant alors, la famille $(C(x))_{x\in S}$ forme une partition de E.

Relation d'ordre

définition

On appelle relation $\preccurlyeq$ d'ordre toute relation binaire sur un ensemble E satisfait les trois propriétés.

- de reflexivité,
- d'anti-symétrie,
- de transitivité.

Remarque

$<$ n'est pas une relation d'ordre, mais $\leq$ en est bien une.

Exemples

ordre total

définition

On dit qu'une relation $\preccurlyeq$ d'ordre sur un ensemble E est *totale* si par définition :

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x$$

Cela signifie qu'on peut toujours comparer deux éléments.

contre-exemples

- la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$
- la relation d'inclusion dans l'ensemble des parties

bon ordre

définition

On dit qu'un ensemble E muni d'une relation d'ordre est *bien ordonné* ou encore muni *d'un bon ordre* lorsque toute partie de E non vide possède un plus petit élément.

exemple