Nombres de Catalan

13 novembre 2018

Université de Lille

table des matières

L'ensemble $X = \{(,)\}$ est un ensemble à deux éléments. L'un est nommé *parenthèse ouvrante*, l'autre est nommé *parenthèse fermante*.

remarque

Parfois, on utilise d'autres caractères pour représenter les parenthèses, par exemple a et b. Il faut alors préciser quel est le caractère ouvrant et quel est le caractère fermant.

Comme en codage, on note X^* l'ensemble des mots sur l'alphabet X^*
$X^* = \{\varepsilon, (,), ((,(),)(,)), (((,....\}$

définition

On dit qu'un mot u de X^* est bien parenthésé si par définition

- le nombre d'occurences de parenthéses ouvrantes dans le mot u est égal au nombre d'occurences de parenthèses fermantes.
- et dans tout préfixe v de u, le nombre d'occurences de parenthéses ouvrantes dans le mot v est supérieur ou égal au nombre d'occurences de parenthèses fermantes.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des mots bien parenthésés.
Ce type de mot s'appelle *les mots de Dyck*

Propriétés

- Le mot vide est bien parenthésé,

Propriétés

- Le mot vide est bien parenthésé,
- les mots bien parenthésés sont de longueur paire,

Propriétés

- Le mot vide est bien parenthésé,
- les mots bien parenthésés sont de longueur paire,
- la concaténation de deux mots bien parenthésés est un mot bien parenthésés.

Propriétés

- Le mot vide est bien parenthésé,
- les mots bien parenthésés sont de longueur paire,
- la concaténation de deux mots bien parenthésés est un mot bien parenthésés.
- Si on encadre un mot parenthésé par –à gauche– une parenthèse ouvrante, et par –à droite– une parenthèse fermante, on obtient un mot bien parenthésé.

Propriétés

- Le mot vide est bien parenthésé,
- les mots bien parenthésés sont de longueur paire,
- la concaténation de deux mots bien parenthésés est un mot bien parenthésés.
- Si on encadre un mot parenthésé par –à gauche– une parenthèse ouvrante, et par –à droite– une parenthèse fermante, on obtient un mot bien parenthésé.
- L'ensemble des mots bien parenthésés peut se construire à partir de ces deux opérations.

Propriétés

- Le mot vide est bien parenthésé,
- les mots bien parenthésés sont de longueur paire,
- la concaténation de deux mots bien parenthésés est un mot bien parenthésés.
- Si on encadre un mot parenthésé par –à gauche– une parenthèse ouvrante, et par –à droite– une parenthèse fermante, on obtient un mot bien parenthésé.
- L'ensemble des mots bien parenthésés peut se construire à partir de ces deux opérations.

Propriétés

- Le mot vide est bien parenthésé,
- les mots bien parenthésés sont de longueur paire,
- la concaténation de deux mots bien parenthésés est un mot bien parenthésés.
- Si on encadre un mot parenthésé par –à gauche– une parenthèse ouvrante, et par –à droite– une parenthèse fermante, on obtient un mot bien parenthésé.
- L'ensemble des mots bien parenthésés peut se construire à partir de ces deux opérations.

notation

On note $\mathcal{B}_n$, l'ensemble des mots bien parenthésés de longueur $2n$.

un peu de code

la documentation a été retirée pour la concision.


```
def est_bien_parenthésée(s):
    t=0
    for i in range(len(s)):
        assert s[i] in "()"
        if s[i]=='(':
            t+=1
        else:
            t-=1
            if t<0:
                return False
    return t==0
```

un peu de code

la documentation a été retirée pour la concision.


```
def enum_mot_de_x(longueur):
    if longueur==0:
        return [""]
    else:
        prec=enum_mot_de_x(longueur-1)
        return ([ "("+elt for elt in prec ]+
                [ ")"+elt for elt in prec ])

def mots_bien_parenthésés(longueur):
    return [ elt for elt in enum_mot_de_x(longueur)
             if est_bien_parenthésée(elt)]
```

Chemins sous la diagonale

- On part du point de coordonnées $(0, 0)$.

Chemins sous la diagonale

- On part du point de coordonnées $(0, 0)$.
- On s'autorise deux déplacements :

Chemins sous la diagonale

- On part du point de coordonnées $(0, 0)$.
- On s'autorise deux déplacements :
  - on note D un pas vers la droite l'abscisse augmente de une unité, l'ordonnée ne change pas,

Chemins sous la diagonale

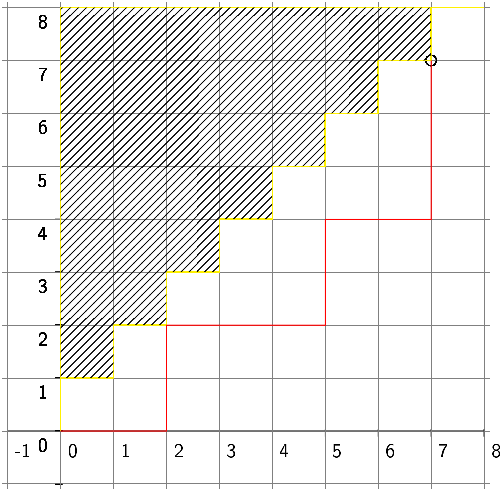
- On part du point de coordonnées $(0, 0)$.
- On s'autorise deux déplacements :
  - on note D un pas vers la droite l'abscisse augmente de une unité, l'ordonnée ne change pas,
  - on note H un pas vers le haut l'abscisse ne change pas, l'ordonnée augmente de une unité.

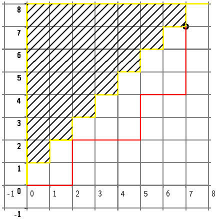
Chemins sous la diagonale

- On part du point de coordonnées $(0, 0)$.
- On s'autorise deux déplacements :
  - on note D un pas vers la droite l'abscisse augmente de une unité, l'ordonnée ne change pas,
  - on note H un pas vers le haut l'abscisse ne change pas, l'ordonnée augmente de une unité.
- On souhaite atteindre le point de coordonnées (n, n).

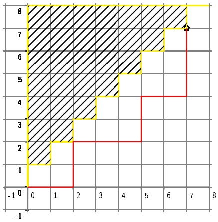
Chemins sous la diagonale

- On part du point de coordonnées $(0,0)$.
- On s'autorise deux déplacements :
  - on note D un pas vers la droite l'abscisse augmente de une unité, l'ordonnée ne change pas,
  - on note H un pas vers le haut l'abscisse ne change pas, l'ordonnée augmente de une unité.
- On souhaite atteindre le point de coordonnées (n,n).
- On s'interdit de passer au dessus de la diagonale.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8



- On code ce problème en utilisant un alphabet de deux lettres.
- La limite diagonale, implique que dans tout préfixe le nombre de D est supérieur au nombre de H.
- L'arrivée au point (n, n) garantit que dans le mot entier, il y a autant de D que de H.



- On code ce problème en utilisant un alphabet de deux lettres.
- La limite diagonale, implique que dans tout préfixe le nombre de D est supérieur au nombre de H.
- L'arrivée au point (n, n) garantit que dans le mot entier, il y a autant de D que de H.

Il s'agit encore de mots de Dyck.

Définition

soit X un ensemble.

Définition

On note $AB(X)$ le plus petit [a] ensemble contenant l'arbre vide noté Δ, et tel que si $g \in AB(X)$, si $d \in AB(X)$ et si $x \in X$ alors $(x, g, d) \in AB(X)$ (on appelle cette deuxième propriété *stabilité*).

a. au sens de l'inclusion

construction

On construit une suite d'ensembles :

$$X_0 = \{\Delta\}$$

$$X_{n+1} = X_n \cup X \times X_n \times X_n$$

propriétés

- La suite définie est croissante au sens de l'inclusion
- L'ensemble
$$\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$
contient l'arbre vide et et vérifie la propriété de stabilité par construction.
- L'ensemble
$$\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$
est inclus dans tout ensemble contenant l'arbre vide est vérifiant la propriété de stabilité
- Par conséquent, c'est lui le plus petit au sens de l'inclusion.

$$AB(X) = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

taille

On définit ainsi, une application de $AB(X)$ dans $\mathbb{N}$ de manière récursive :

$$\text{taille}\,(\Delta) = 0$$

$$\text{taille}\,((x,g,d)) = 1 + \text{taille}\,(g) + \text{taille}\,(d)$$

La fonction taille est bien définie.

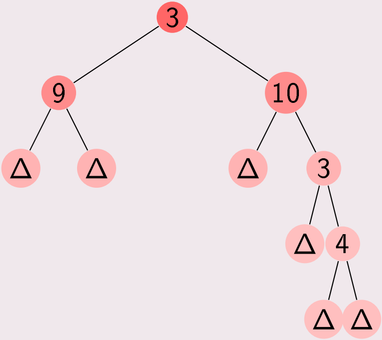
$$\forall a \in AB(X)\text{taille}\,(a) \in \mathbb{N}$$

arbre de taille donnée

$$AB_n(X) = \{a \in AB(X) : \text{taille}\,(a) = n\}$$

Exemples d'arbres

Un arbre dont les noeuds sont des entiers

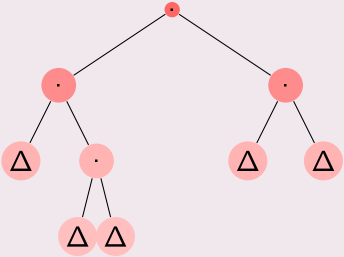


Voici un élément de $AB(\mathbb{N})$

Arbre sur un singleton

$AB(\{.\})$ est l'ensemble des arbres dont les noeuds sont étiquetés par *la même* étiquette. donc peut importe la valeur des noeuds. On s'interesse juste à la géométrie de l'arbre.

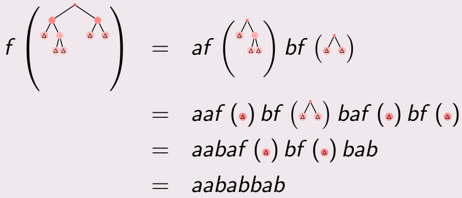
exemple



construisons une application f de $AB(\{.\})$ dans $\{a, b\}^*$ de la manière suivante :

- $f(\Delta) = \epsilon$ où ϵ désigne le mot vide.
- $f((., g, d)) = af(g)bf(d)$

exemple



Une bijection

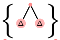
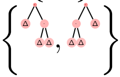
Théorème

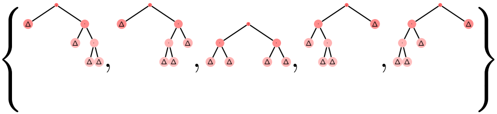
Il existe une bijection entre $AB(\{.\})$ et B

Théorème

la restriction de cette bijection à $AB_n(\{.\})$ à pour image B_n

Comptons $AB_n(\{.\})$

n	$u_n = card\,(AB_n(\{.\}))$	$AB_n(\{.\})$
0	1	$\{\Delta\}$
1	1	
2	2	
3	$5 = u_0 u_2 + u_1 u_1 + u_2 u_0$	voir au dessous
4	$14 = u_0 u_3 + u_1 u_2 + u_2 u_1 + u_3 u_0$	non représenté
5	$42 = u_0 u_4 + u_1 u_3 + u_2 u_2 + u_3 u_1 + u_4 u_0$	non représenté

$AB_3(\{.\}) =$ 

Vérfions avec les mots de Dyck

On définit une suite (b) ainsi :

$$b_n = card\left(\mathcal{B}_n\right)$$

La relation de récurrence

$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

elle n'est pas d'ordre finie.
Pour calculer le terme d'ordre n on a besoin de tous les termes précédents.
Elle n'est pas linéaire.

```
>>> premiers_termes=[ len(mots_bien_parenthésés(2*i
                  for i in range(6) ]
>>> premiers_termes
[1, 1, 2, 5, 14, 42]
```

Un outil fantastique !

Une encyclopédie en ligne, qui existe depuis bien plus longtemps que wikipedia. C'est l'OEIS, acronyme de *Online Encyclopedia of Integer Sequences*.
La traduction en français est l'encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers.
`https://oeis.org/?language=french`
Elle permet de retrouver les suites dont on connait les premiers termes. Elle contient aussi beaucoup d'information connues sur ces suites, relations, formules ...

Interrogeons l'OEIS

`https://oeis.org/search?q=1%2C+1%2C+2%2C+5%2C+14%2C+42&language=french&go=Chercher`

Une formule pour les nombres de Catalan

Nombres de Catalan

$$C(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$