les suites (suite)

Méthodes de résolution

10 novembre 2018

Université de Lille

table des matières

cas général

On considère les suites récurrentes linéaires homogène à coefficient constants satisfaisants l' équation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+r} = q_{r-1}u_{n+r-1} + q_{r-2}u_{n+r-2} + \ldots + q_0 u_n$$

On forme l'équation caractéristique.

$$x^r = q_{r-1}x^{r-1} + q_{r-2}x^{r-2} + \ldots q_1 x + q_0$$

- si toutes les racines sont simples alors les suites sont combinaisons linéaires des suites géométriques définies par les racines.
- lorsqu'une racine x est multiple de multiplicité m, on ajoute à la combinaison linéaire des termes en $n^k x^n$ avec k compris entre 0 et $m-1$.

exemple

$$u_0 = -1 \quad u_1 = 14 \quad u_2 = 94 \quad u_3 = 390$$

$$u_{n+4} = 9u_{n+3} - 30u_{n+2} + 44u_{n+1} - 24u_n$$

On forme l'équation caractèristique :

$$x^4 = 9x^3 - 30x^2 + 44x - 24$$

c'est à dire :

$$x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = 0$$

C'est une équation du 4^{e} degré. Il existe une méthode pour résoudre ce genre d'équation. Toutefois, ce n'est pas l'objet de ce cours. On utilise la bonne vieille méthode : "existe-t-il des racines évidentes ?"

- testons 2.
$$16 - 72 + 120 - 88 + 24 = 0$$
- testons 3.
$$81 - 243 + 270 - 132 + 24 = 0$$

donc 2 et 3 sont racines de l'équation

On factorise l'équation caractéristique :

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
x^4 & - & 9x^3 & + & 30x^2 & - & 44x & + & 24 & \quad x-2 \\ \cline{10-10}
x^4 & - & 2x^3 & & \vdots & & & & & x^3-7x^2+16x-1 \\ \cline{1-3}
 & - & 7x^3 & + & 30x^2 & & \vdots & & & \\
 & - & 7x^3 & + & 14x^2 & & & & \vdots & \\ \cline{2-4}
 & & & & 16x^2 & - & 44x & & & \\
 & & & & 16x^2 & - & 32x & & & \\ \cline{5-7}
 & & & & & - & 12x & + & 24 & \\
 & & & & & - & 12x & + & 24 & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

2 est encore racine de $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & - & 7x^2 & + & 16x & - & 12 & x-2 \\ \cline{8-8}
-(x^3 & - & 2x^2) & & \vdots & & & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-3}
 & - & 5x^2 & + & 16x & & \vdots & \\
 & -(- & 5x^2 & + & 10x) & & & \\ \cline{2-5}
 & & & & 6x & - & 12 & \\
 & & & & -(6x & - & 12) & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$x^2 - 5x + 6$ est un trinôme du second degré, qu'on sait factoriser.

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

remarque

a est une racine d'ordre m d'un polynome p si et seulement si

$$p(a) = 0, p'(a) = 0, p''(a) = 0, \dots, p^{(m-1)}(a) = 0 et p^{(m)}(a) \neq 0$$

2 est encore racine de $p(x) = x^3 - 7\,x^2 + 16\,x - 12$

la suite de la factorisation donne :

$$x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = (x-2)^3(x-3)$$

2 est racine triple et 3 racine simple.

La solution est donc de la forme :

$$(an^2 + bn + c) \times 2^n + d \times 3^n$$

reste à trouver a, b, c et d. Or

$$u_0 = -1 \quad u_1 = 14 \quad u_2 = 94 \quad u_3 = 390$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & c & +d & = & -1 \\ 2a & +2b & +2c & +3d & = & 14 \\ 16a & +8b & +4c & +9d & = & 94 \\ 72a & +24b & +8c & +27d & = & 390 \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système :

- à la ligne 2 on retranche 3 fois la ligne 1
- à la ligne 3 on retranche 9 fois la ligne 1
- à la ligne 4 on retranche 27 fois la ligne 1

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & c & +d & = & -1 \\ 2a & +2b & -c & & = & 17 \\ 16a & +8b & -5c & & = & 103 \\ 72a & +24b & -19c & & = & 417 \end{array}\right.$$

- on multiplie la ligne 2 par -1
- à la ligne 3, on ajoute 5 fois la nouvelle ligne 2
- à la ligne 4, on ajoute 19 fois la nouvelle ligne 2

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & c & +d & = & -1 \\ -2a & -2b & c & & = & -17 \\ 6a & -2b & & & = & 18 \\ 34a & -14b & & & = & 94 \end{array}\right.$$

- on multiplie la ligne 3 par $-\frac{1}{2}$
- à la ligne 4, on ajoute 14 fois la nouvelle ligne 3

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & +c & +d & = & -1 \\ -2a & -2b & +c & & = & -17 \\ -3a & +b & & & = & -9 \\ -8a & & & & = & -32 \end{array}\right.$$

Il ne reste plus qu'à remonter pour trouver a, b, c et d. On trouve $a = 4$ puis $b = 3$, $c = -3$ et enfin $d = 2$ Par conséquent :

$$u_n = 2^n(4n^2 + 3n - 3) + 2(3^n)$$

Définition

définition

On dit qu'une suite est récurrente linéaire non homogéne à coefficients constants si par définition :

- il existe un entier $r \geq 1$,
- il existe $2r$ nombres réels $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$ et $q_0, q_1, \ldots q_{r-1}$,
- il existe une fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,

tels que :

$$\forall i < r \quad u_i = a_i$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+r} = q_{r-1} u_{n+r-1} + q_{r-2} u_{n+r-2} + \ldots + q_0 u_n + g(n)$$

exemple

Exemple 1

Les suites arithmético-géométriques sont le premier exemple déjà rencontré précédemment. La méthode utilisée dans leur résolution contient l'idée fondamentale.
On cherche une solution particulière.
La solution générale de l'équation non homogène s'obtient en faisant la somme de cette solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
Puis à l'aide des conditions initiales, par identification, on trouve les coefficients.

Recherche de la solution particulière

- si la fonction g est un polynôme en n, alors on cherche un polynome en n. (généralement de même degré que g, mais on peut être amené à augmenter le degré, si 1 est racine du polynôme caractéristique.)
- si la fonction g est géométrique de raison a alors on cherche une suite géométrique de même raison a. (a est racine de l'équation caractèristique, on cherche une solution particulière sous la forme $p(n)a^n$ où p est un polynome de degré un de plus que l'ordre de la racine a dans l'équation caractéristique)

exemple calcul de sommes

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} 3i^2 + 2i + 1$$

On transforme la suite comme une suite récurrente linéaire.

$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = u_n + (3(n+1)^2 + 2(n+1) + 1)$$

$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = u_n + (3n^2 + 8n + 6)$$

1 est racine du polynôme caractéristique, on cherche la solution sous la forme d'un polynôme de degré 3.

$$p(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

Il y a quatre coefficients à determiner a, b, c, d. On procéde par identification en calculant les premiers termes de la suite u.

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 7 \quad u_2 = 24 \quad u_3 = 58 \quad (u_4 = 115)$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & & d & = & 1 \\ a & +b & +c & +d & = & 7 \\ 8\,a & +4\,b & +2\,c & +d & = & 24 \\ 27\,a & +9\,b & +3\,c & +d & = & 58 \end{array}\right.$$

- à la ligne 2 on retranche la ligne 1
- à la ligne 3 on retranche la ligne 1
- à la ligne 4 on retranche la ligne 1

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & & d & = & 1 \\ a & +b & +c & & = & 6 \\ 8\,a & +4\,b & +2\,c & & = & 23 \\ 27\,a & +9\,b & +3\,c & & = & 57 \end{array}\right.$$

- à la ligne 3, on retranche 2 fois la ligne 2
- à la ligne 4, on retranche 3 fois la ligne 2

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & & d & = & 1 \\ a & +b & +c & & = & 6 \\ 6\,a & +2\,b & & & = & 11 \\ 24\,a & +6\,b & & & = & 39 \end{array}\right.$$

- on multiplie la ligne 3 par $\frac{1}{2}$.
- à la ligne 4, on retranche 6 fois la nouvelle ligne 3

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & & d & = & 1 \\ a & +b & +c & & = & 6 \\ 3\,a & +b & & & = & \frac{11}{2} \\ 6\,a & & & & = & 6 \end{array}\right.$$

Il ne reste plus qu'à remonter. $a = 1$, $b = \frac{5}{2}$, $c = \frac{5}{2}$ et $d = 1$

$$p(n) = n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

```
>>> def p(n):
return n**3+ (5*n**2+5*n)//2 + 1
>>> [ p(i) for i in range(5)]
[1, 7, 24, 58, 115]
```

exemple ordre 2

$$u_0 = 12 \quad u_1 = 53$$

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 100 \times 7^n$$

relation récurrente homogéne associée

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

équation caractéristique

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

résolution : deux racines $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$

Solution générale de l'équation homogéne

$$u_n = k \times 2^n + l \times 3^n$$

recherche d'une solution particulière

On recherche une solution particuliére sous la forme $m \times 7^n$

$$m7^{n+2} = 5m7^{n+1} - 6m7^n + 100\,7^n$$

On peut diviser par 7^n.

$$49m = 35m - 6m + 100$$

$$m = 5$$

la solution générale est donc sous la forme :

$$k2^n + l3^n + 5 \times 7^n$$

Il ne reste plus qu'à trouver k et l