les suites (suite)

Méthodes de résolution

16 octobre 2018

Université de Lille

table des matières

Suites récurrentes

exemple

$$v_0 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = 3v_n$$

ordre

si le terme suivant s'exprime en utilisant juste le terme courant, on dit que la suite est récurrente d'ordre 1.
Plus généralement, si pour calculer le terme suivant, on utilise le terme courant et les $k-1$ termes précédents, on dit que la suite est récurrente d'ordre k.

exemple

La suite de Fibonacci est récurrente d'ordre 2

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Il existe des suites récurrentes dont l'expression fait intervenir l'ensemble des termes qui précédent, et pas seulement un nombre donné d'entre-eux.
On rencontrera un tel exemple un peu plus loin

Suite arithmétique

définition

Une suite est dite arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante. On appelle cette constante la *raison* de la suite.

exemple

$$u_n = 4n + 5$$

soit n fixé :

$$u_{n+1} - u_n = (4(n+1)+5) - (4n+5) = 4$$

vrai pour tout entier n la suite u est une suite arithmétique de raison 4

exemple

$$v_0 = 12$$

$$v_{n+1} = v_n + 8$$

Théorème

Si u est une suite arithmétique de premier terme a et de raison r alors pour tout entier naturel n, on a $u_n = a + n \times r$

Suite géométrique

définition

Une suite est dite géométrique, si il existe un réel q tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = qu_n$. (si aucun terme de la suite n'est nul cela revient à dire que le quotient de deux termes consécutifs est constant.) On appelle *raison* la constante q

exemple

$$u_n = 5 \times 4^n$$

soit n fixé :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 4^{n+1}}{5 \times 4^n} = 4$$

vrai pour tout entier n la suite u est une suite géométrique de raison 4

exemple

$$v_0 = 12$$

$$v_{n+1} = 8v_n$$

Théorème

Si u est une suite géométrique de premier terme a et de raison q alors pour tout entier naturel n, on a $u_n = a \times q^n$

Suite arithmético-géométrique

définition

Une suite est dite arithmético-géométrique, si il existe un réel q, si existe un réel r tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = q \times u_n + r$.

exemple

$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = 4u_n + 6$$

exemple

La méthode de résolution est de se ramener à une suite géométrique. On résout l'équation : (on cherche une suite constante qui satisfait la relation de récurrence)

$$l = 4l + 6$$

$$l = -2$$

Puis on pose pour tout entier n : $u_n = l + v_n$ cela nous donne la relation suivante pour v_n :

$$v_0 = 1 - (-2) = 3$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = 4u_n + 6 - (-2) = 4u_n + 8 = 4(u_n + 2) = 4v_n$$

Donc la suite v est géométrique, de premier terme 3 et de raison 4, on connait donc l'expression du terme général de v_n et par conséquent, on en déduit l'expression du terme général de u_n .

$$v_n = 3 \times 4^n$$

$$u_n = 3 \times 4^n - 2$$

Cas général

$$u_0 = a$$

$$u_{n+1} = q \times u_n + r$$

si $q = 1$ c'est une suite arithmétique voir avant. si $q \neq 1$. On cherche l tel que $l = q \times l + r$.

$$l = \frac{r}{1-q}$$

On pose $u_n - l = v_n$

$$v_0 = a - \frac{r}{1-q}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = (q \times u_n + r) - (q \times l + r) = q(u_n - l) = qv_n$$

la suite v est géométrique de raison q. on connait son premier terme.

$$v_n = \left(a - \frac{r}{1-q}\right) q^n$$

donc

$$u_n = \frac{r}{1-q} + \left(a - \frac{r}{1-q}\right) q^n$$

Il n'est pas indispensable d'apprendre par cœur cette formule, en revanche la méthode pour exprimer le terme général d'une suite arithmético-géométrique est à comprendre, et à savoir refaire.

Suite récurrente linéaire homogène à coefficients constants

définition

- r désigne un entier naturel.
- $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$ désignent des nombre réels.
- $q_0, q_1, \ldots q_{r-1}$ désignent des nombre réels.

On dit que la suite u est une suite récurrente d'ordre r, linéaire, homogène à coefficient constant si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+r} = q_{r-1}u_{n+r-1} + q_{r-2}u_{n+r-2} + \ldots q_0 u_n$$

et

$$\forall i < r \quad u_i = a_i$$

exemple

exemple du 1er ordre

Si $r = 1$, alors on retrouve les suites géométriques vues précédemment.

exemple

exemple du second ordre

La suite de Fibonacci est linéaire homogéne a coefficient constant d'ordre 2

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

ici

- $r = 2$
- $a_0 = 0$
- $a_1 = 1$
- $q_0 = 1$
- $q_1 = 1$

une remarque

L'idée est de constater que l'ensemble des suites qui satisfont l'équation de récurrence sans les conditions initiales forme un *sous espace vectoriel* de dimension deux (car ici $r = 2$)de l'ensemble des suites.

chercher les suites géométriques

On cherche s'il existe des suites géométriques (ici deux de préférence car $r = 2$) qui satisfont l'équation de récurrence.
On obtient une équation à résoudre dite *équation caractéristique*

Ici : $r^2 = r + 1$ C'est une équation du second degré (car $r = 2$, plus généralement elle est de degré r)

plusieurs situations sont possibles.

- deux solutions réelles.
- une racine double.
- pas de racines réelles. (mais dans ce cas deux racines complexes conjuguées, on se ramène au premier cas) n

ici

$$r^2 - r - 1 = 0$$

On calcule le discriminant : ici $a = 1$ $b = -1$ et $c = -1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (1) \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

on est dans le premier cas

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Le premier cas est le plus facile, on a trouvé deux suites géométriques de raisons différentes, il est facile de vérifier qu'elles sont linéairement indépendantes, et forment une base de l'ensemble des solution. donc toutes les suites s'expriment comme combinaison linéaire de ces deux suites. Il ne reste plus qu'à trouver les coefficients.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = k \times r_1^n + l \times r_2^n$$

En particulier pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui nous donne un moyen de trouver k et l à l'aide des condition initiales pour F.

$$F_0 = 0 = k \times r_1^0 + l \times r_2^0 = k + l$$

$$F_1 = 1 = k \times r_1^1 + l \times r_2^1 = k\frac{1-\sqrt{5}}{2} + l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} 0 = l + k \\ 1 = k\frac{1-\sqrt{5}}{2} + l\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = -k \\ 1 = -k\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = -k \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ k = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = -\frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

application


```
from math import sqrt

def fibo_directe(n):
    """ compute the term of index n of  Fibonacci's sequence

    :param n: the index of the term
    :type n: int
    :rtype: float
    :UC: n is a non negative int.
      if not raise AssertError
    :Examples: see below

    """
    assert n>=0
    k=-sqrt(5)/5
    l=sqrt(5)/5
    r1=(1-sqrt(5))/2
    r2=(1+sqrt(5))/2
    return k*r1**n+l*r2**n

>>> fibo_directe(0)
0.0
>>> fibo_directe(1)
1.0
>>> fibo_directe(2)
1.0
>>> fibo_directe(3)
2.0000000000000004
>>> type(fibo_directe(3))
<class 'float'>
```

application

remarque importante

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| -\frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| < \frac{1}{2}$$

```
from math import sqrt

def fibo_arrondie(n):
    """ calcule le nieme terme de la suite de fibonacci

    :param n: the index of the term
    :type n: int
    :rtype: int
    :UC: n is a non negative int.
      if not raise AssertError
    :Examples: see below

    """
    assert n>=0
    l=sqrt(5)/5
    r2=(1+sqrt(5))/2
    return round(l*r2**n)

>>> fibo_arrondie(0)
0
>>> fibo_arrondie(1)
1
>>> fibo_arrondie(2)
1
>>> fibo_arrondie(3)
2
>>> fibo_arrondie(4)
3
>>> fibo_arrondie(100)
354224848179263111168
>>> fibo_arrondie(100)-fibo_arrondie(99)-fibo_arrondie(98)
-16384
>>>
```