Les principes fondamentaux du dénombrement

4 octobre 2018

table des matières

Mini'R

Très tôt avant le cours de Maths discrètes, sept étudiants s'arrêtent à la caféterie de la maison des étudiants. Ils ont le choix entre

- sandwich composé jambon
- sandwich composé dinde
- sandwich composé thon
- faluche au saumon

On s'interresse au nombre global de commandes groupées de sandwich. On suppose qu'il y a assez de sandwichs de chaque sorte.)

exemple

exemple de commandes

1. j, j, d, d, t, t, s
2. j, j, j, j, d, t, s
3. j, j, j, j, j, j, s
4. d, t, t, s, s, s, s
5. t, t, t, t, t, s, s
6. t, t, t, t, t, t, t
7. s, s, s, s, s, s, s

exemple

codage de la commande

$1.j, j, d, d, t, t, s$	$1.xx\|xx\|xx\|x$
$2.j, j, j, j, d, t, s$	$2.xxxx\|x\|x\|x$
$3.j, j, j, j, j, j, s$	$3.xxxxxx\|\|\|x$
$4.d, t, t, s, s, s, s$	$4.\|x\|xx\|xxxx$
$5.t, t, t, t, t, s, s$	$5.\|\|xxxxx\|xx$
$6.t, t, t, t, t, t, t$	$6.\|\|xxxxxxx\|$
$7.s, s, s, s, s, s, s$	$7.\|\|\|xxxxxxx$

dénombrement

On considére des mots de 10 lettres sur l'alpabet à deux lettres $\{|, x\}$ contenant exactement 7 x (et donc 3 |).

$$\binom{10}{7}$$

Cas général

combinaisons avec répétition

Si on souhaite choisir en s'autorisant les répétitions r objets parmi n objets distincts, cela revient à considérer les arrangements de r x et $n-1$ |. Le nombre de telle selection est donc

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

secrétaires

La présidente d'une entreprise a quatre secrétaires, Alain, Betty, Carla, et David. Elle souhaite distribuer une prime de fin d'année de 1000 € en billets de 100 €.

En autorisant la situation dans laquelle un(e) ou plusieurs secrétaires ne reçoivent rien De combien de manières la répartition peut-elle être faite ?

la présidente n'a pas griefs particuliers envers les secrétaires. Chacun doit recevoir au moins 100 €. De combien de manières la répartition peut-elle être faite ?

Betty est secrétaire en chef. À ce titre sa prime doit être au moins de 500 € De combien de manières la répartition peut-elle être faite ?

une équation

Combien de solution ?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

avec $x_1 \in \mathbb{N}$ et $x_2 \in \mathbb{N}$ et $x_3 \in \mathbb{N}$ et $x_4 \in \mathbb{N}$

On considère le nombre 7 écrit en unaire (avec des bâtons),
Chaque solution correspond à un mot écrit avec

- sept bâtons
- et trois signes d'addition $(+)$

Par exemple

- 3+1+2+1 se code par |||+|+||+|
- 7+0+0+0 se code par |||||||+++

les mots sont des mots de 10 signes sur l'alphabet $X = \{+, |\}$ constitués de trois signes + et de sept signes |...
Parmi les dix emplacements, il suffit de choisir les places pour les signes +

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

une équation

Combien de solution ?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

avec $x_1 \in \mathbb{N}$ et $x_1 \geq 2$ et $x_2 \in \mathbb{N}$ et $x_3 \in \mathbb{N}$ et $x_4 \in \mathbb{N}$

C'est la même idée, mais avant, on procède à un changement de variable $x_1 = 2 + y_1$ avec $y_1 \geq 0$ l'équation devient

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

avec $y_1 \in \mathbb{N}$ et $x_2 \in \mathbb{N}$ et $x_3 \in \mathbb{N}$ et $x_4 \in \mathbb{N}$
On considère le nombre 5 écrit en unaire (avec des bâtons),
Chaque solution correspond à un mot écrit avec

- cinq bâtons
- et trois signes d'addition (+)

Par exemple

- 1+1+2+1 se code par |+|+||+|
- 5+0+0+0 se code par |||||+++

les mots sont des mots de 8 signes sur l'alphabet $X = \{+, |\}$
constitués de trois signes + et de cinq signes |...
parmi les dix emplacements, il suffit de choisir les places pour les signes +

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

En résumé

Si on a n choses distinctes et qu'on en choisit p

	on tient compte de l'ordre	on ne tient pas compte de l'ordre
sans répétition	A_n^p	$\binom{n}{p}$
avec des répétitions possibles	n^p	$\binom{n+p-1}{p}$

Retour : La règle de la somme

Si une tâche peut être accomplie de m manières, et si une autre tâche peut être accomplie de n manières. et si les deux tâches ne peuvent pas être réalisées simultanément, alors la réalisation d'une ou de l'autre des deux tâches peut être accomplie de $m + n$ manières

exemples

Une bibliothèque dispose de 40 ouvrages de sociologie et de 50 ouvrages traitant d'anthropologie. (on considère qu'il n'existe pas de livre traitant des deux sujets à la fois) En utilisant la règle de la somme, un étudiant a le choix entre 40+50=90 ouvrages pour en connaitre un peu plus sur l'un des sujets.

rappel

définition

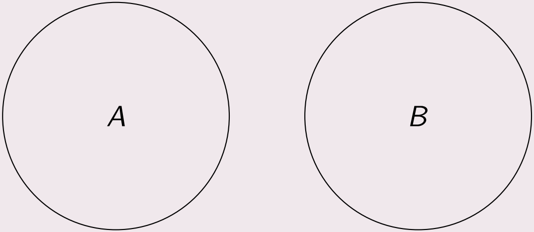
On dit que A et B sont des ensembles disjoints si aucun élément n'est commun à la fois à A et B. On note aussi que $A \cap B = \emptyset$

la règle de la somme

Traduction avec des ensembles

Si A et B sont deux parties finies *disjointes* alors

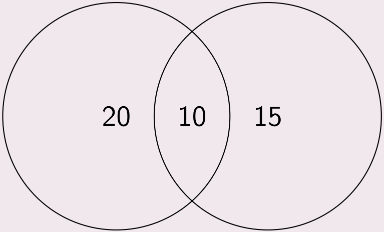
$$card\,(A \cup B) = card\,(A) + card\,(B)$$



Et si les ensembles ont des éléments en commun ?

exemple

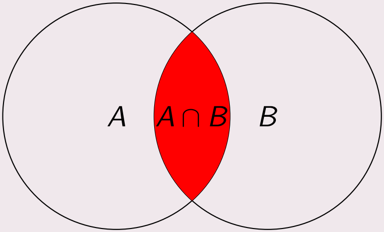
Dans une groupe de 50 personnes, 30 connaissent le Python, 25 connaissent le Caml, et 10 connaissent les deux. Combien de personnes connaissent au moins l'un de ces deux langages ?



Théorème

Si A et B sont deux parties finies lors

$$card\,(A \cup B) = card\,(A) + card\,(B) - card\,(A \cap B)$$



exemple

Dans une groupe de 50 personnes, 30 connaissent le Python, 25 connaissent le Caml, et 10 connaissent les deux. Combien de personnes connaissent ni l'un ni l'autre de ces deux langages ?

faire un dessin.

Et avec trois ensembles ?

défauts

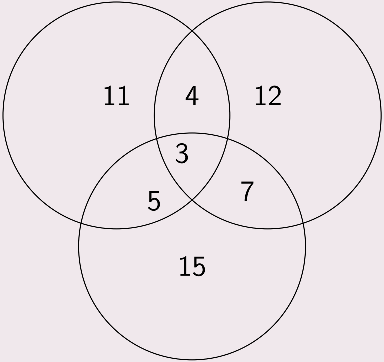
Un circuit intégré eut avoir indépendamment l'un des trois défauts suivants :

- D_1 : la broche 1 reste bloquée à 0.
- D_2 : la broche 2 reste bloquée à 0
- D_3 : la broche 3 reste bloquée à 1

Pour un ensemble de tels circuits on note respectivement A, B, C les circuits ayant respectivement les défauts D_1, D_2, D_3.

- $card\,(A) = 23$
- $card\,(B) = 26$
- $card\,(C) = 30$
- $card\,(A \cap B) = 7$
- $card\,(A \cap C) = 8$
- $card\,(B \cap C) = 10$
- $card\,(A \cap B \cap C) = 3$

combien de circuits sont defectueux ?


11
4
12
3
5
7
15

Pour trois

A, B, C sont trois ensembles finis :

$$\begin{aligned} card\,(A \cup B \cup C) \quad = \quad & card\,(A) + card\,(B) + card\,(C) \\ & - card\,(A \cap B) \\ & - card\,(A \cap C) \\ & - card\,(B \cap C) \\ & + card\,(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Complémentaire

A, B, C sont trois parties d'un ensemble fini U :

$$\begin{aligned} card\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) \quad = \quad & card\,(U) \\ & - card\,(A) - card\,(B) - card\,(C) \\ & + card\,(A \cap B) \\ & + card\,(A \cap C) \\ & + card\,(B \cap C) \\ & - card\,(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

multiples

Compter les nombres compris entre 1 et 100 qui ne sont

- ni divisible par 2,
- ni divisible par 3,
- ni divisible par 5.

sans les énumérer (on pourra le faire pour vérifier la réponse)

Le nombre de multiples de k compris entre 1 et n au sens large est $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

En effet tout multiple de k compris entre 1 et n s'écrit de manière unique $l.k$ où l est un entier naturel compris dans l'intervalle $\llbracket 1, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \rrbracket$. Or on sait que :

$$card\left(\llbracket 1, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \rrbracket\right) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 + 1 = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor .$$

- $A_1 = \{n \in [\![1, 100]\!] \mid n \text{ multiple de } 2\}$
- $A_2 = \{n \in [\![1, 100]\!] \mid n \text{ multiple de } 3\}$
- $A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \mid n \text{ multiple de } 5\}$
- $A_1 \cap A_2 = \{n \in [\![1, 100]\!] \mid n \text{ multiple de } 6\}$
- $A_1 \cap A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \mid n \text{ multiple de } 10\}$
- $A_2 \cap A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \mid n \text{ multiple de } 15\}$
- $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \mid n\text{multiple de } 30\}$

- $A_1 = \{n \in [\![1, 100]\!] \,|n \text{ multiple de } 2\}$
- $A_2 = \{n \in [\![1, 100]\!] \,|n \text{ multiple de } 3\}$
- $A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \,|n \text{ multiple de } 5\}$
- $A_1 \cap A_2 = \{n \in [\![1, 100]\!] \,|n \text{ multiple de } 6\}$
- $A_1 \cap A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \,|n \text{ multiple de } 10\}$
- $A_2 \cap A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \,|n \text{ multiple de } 15\}$
- $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{n \in [\![1, 100]\!] \,|n\text{multiple de } 30\}$

- $card\,(A_1) = 50$
- $card\,(A_2) = 33$
- $card\,(A_3) = 20$
- $card\,(A_1 \cap A_2) = 16$
- $card\,(A_1 \cap A_3) = 10$
- $card\,(A_2 \cap A_3) = 6$
- $card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3$

- $A_1 = \{n \in [\![1,100]\!] \,|\, n \text{ multiple de } 2\}$
- $A_2 = \{n \in [\![1,100]\!] \,|\, n \text{ multiple de } 3\}$
- $A_3 = \{n \in [\![1,100]\!] \,|\, n \text{ multiple de } 5\}$
- $A_1 \cap A_2 = \{n \in [\![1,100]\!] \,|\, n \text{ multiple de } 6\}$
- $A_1 \cap A_3 = \{n \in [\![1,100]\!] \,|\, n \text{ multiple de } 10\}$
- $A_2 \cap A_3 = \{n \in [\![1,100]\!] \,|\, n \text{ multiple de } 15\}$
- $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{n \in [\![1,100]\!] \,|\, n\text{multiple de } 30\}$

- $card\,(A_1) = 50$
- $card\,(A_2) = 33$
- $card\,(A_3) = 20$
- $card\,(A_1 \cap A_2) = 16$
- $card\,(A_1 \cap A_3) = 10$
- $card\,(A_2 \cap A_3) = 6$
- $card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3$

$$card\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right) = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26$$

Ou plus ?

Un problème

Compter le nombre de manière d'écrire une permutation des 26 lettres de l'alphabet qui ne contienne ni le mot "bit", ni le mot "and", ni le mot "lsh" ni le mot "core".

Le principe d'inclusion-exclusion

A_1, A_2,..., A_n sont des parties d'un ensemble fini U.

$$card\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right) = card\,(U) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} card\,(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

- A_1 ensemble des mots contenant "bit".
  $card\,(A_1) = (26-3+1)! = 24!$
- A_2 ensemble des mots contenant "and".
  $card\,(A_2) = (26-3+1)! = 24!$
- A_3 ensemble des mots contenant "lsh".
  $card\,(A_3) = (26-3+1)! = 24!$
- A_4 ensemble des mots contenant "core".
  $card\,(A_4) = (26-4+1)! = 23!$
- $A_1 \cap A_2$ ensemble des mots contenant "bit" et "and".
  $card\,(A_1 \cap A_2) = (26-6+2)! = 22!$
- $A_1 \cap A_3$ ensemble des mots contenant "bit" et "lsh".
  $card\,(A_1 \cap A_3) = (26-6+2)! = 22!$
- $A_1 \cap A_4$ ensemble des mots contenant "bit" et "core".
  $card\,(A_1 \cap A_4) = (26-7+2)! = 21!$
- $A_2 \cap A_3$ ensemble des mots contenant "and" et "lsh".
  $card\,(A_2 \cap A_3) = (26-6+2)! = 22!$
- $A_2 \cap A_4$ ensemble des mots contenant "and" et "core".
  $card\,(A_2 \cap A_3) = (26-7+2)! = 21!$
- $A_3 \cap A_4$ ensemble des mots contenant "lsh" et "core".
  $card\,(A_3 \cap A_4) = (26-7+2)! = 21!$
- $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ensemble des mots contenant "bit" , "and" et "lsh".
  $card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (26-9+3)! = 20!$
- $A_1 \cap A_2 \cap A_4$ ensemble des mots contenant "bit" , "and" et "core".
  $card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = (26-10+3)! = 19!$
- $A_1 \cap A_3 \cap A_4$ ensemble des mots contenant "bit" ,"lsh" et "core".
  $card\,(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = (26-10+3)! = 19!$
- $A_2 \cap A_3 \cap A_4$ ensemble des mots contenant "and" ,"lsh" et "core".
  $card\,(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = (26-10+3)! = 19!$
- $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ ensemble des mots contenant "bit", "and", "lsh" et "core".
  $card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = (26-13+4)! = 17!$

au total :

$$26! - 3 \times 24! - 23! + 3 \times 22! + 3 \times 21! - 20! - 3 \times 19! + 17!$$