Les principes fondamentaux du dénombrement

23 septembre 2018

Université de Lille

symétrie

propriété

soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

justification

- par le calcul

symétrie

propriété

soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

justification

- par le calcul

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- par un argument combinatoire

symétrie

propriété

soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

justification

- par le calcul

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- par un argument combinatoire

Lorsqu'on « choisit » k éléments parmi n les $n-k$ éléments restants sont parfaitement définis. Il y a donc autant de manières de choisir $n-k$ éléments parmi n que d'en choisir k
plus formellement : l'application qui va de l'ensemble des parties de k éléments d'un ensemble E de n éléments dans l'ensemble des parties de E à $n-k$ éléments qui à un ensemble X associe le complémentaire de X est une bijection.

propriétés

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n}{0} = 1$$

propriétés

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n}{0} = 1$$

justification combinatoire

évident si on considére que $\binom{n}{0}$ compte le nombre de manière de choisir 0 choses parmi n

propriétés

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n}{0} = 1$$

justification combinatoire

évident si on considére que $\binom{n}{0}$ compte le nombre de manière de choisir 0 choses parmi n

justification calculatoire

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

propriétés

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n}{n} = 1$$

justification combinatoire

évident si on considére que $\binom{n}{n}$ compte le nombre de manière de choisir n choses parmi n

justification calculatoire

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

autre justification

C'est un corollaire direct des deux précédentes propriété.

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad p > n \Longrightarrow \binom{n}{p} = 0$$

formule de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

justification calculatoire

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}\,\frac{p+1}{p+1} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}\,\frac{n-p}{n-p} \\
&= \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Exercice de programmation

En python :

En utilisant les propriétés précédentes, réaliser une implantation de de la fonction `coefficient_binomial`

Réfléchir à la question :

« Pourquoi cette implantation –certes élégante– **n**'est **pas** une bonne idée ? »

ligne 0 : $\binom{0}{0}$

ligne 1 : $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

ligne 2 : $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

ligne 3 : $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

ligne 4 : $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

ligne 5 : $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

ligne 6 : $\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

ligne 7 : $\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

ligne 8 : $\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$

ligne 9 : $\binom{9}{0}$ $\binom{9}{1}$ $\binom{9}{2}$ $\binom{9}{3}$ $\binom{9}{4}$ $\binom{9}{5}$ $\binom{9}{6}$ $\binom{9}{7}$ $\binom{9}{8}$ $\binom{9}{9}$

ligne 10 : $\binom{10}{0}$ $\binom{10}{1}$ $\binom{10}{2}$ $\binom{10}{3}$ $\binom{10}{4}$ $\binom{10}{5}$ $\binom{10}{6}$ $\binom{10}{7}$ $\binom{10}{8}$ $\binom{10}{9}$ $\binom{10}{10}$

ligne 0 :											1										
ligne 1 :										1		1									
ligne 2 :									1		2		1								
ligne 3 :								1		3		3		1							
ligne 4 :							1		4		6		4		1						
ligne 5 :						1		5		10		10		5		1					
ligne 6 :					1		6		15		20		15		6		1				
ligne 7 :				1		7		21		35		35		21		7		1			
ligne 8 :			1		8		28		56		70		56		28		8		1		
ligne 9 :		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
ligne 10 :	1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

la formule du binôme

n est un entier naturel, et x et y sont des variables telles que $x * y = y * x$.

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \tbinom{n}{0}x^0y^n + \tbinom{n}{1}x^1y^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^2y^{n-2}\dots \\ &\quad + \tbinom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \tbinom{n}{n}x^ny^0 \\ &= \sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}\end{aligned}$$

un cas particulier

le développement de $(x+y)^4$

$$(x+y)^4 = \underbrace{(x+y)}_{(1^{er} facteur} \times \underbrace{(x+y)}_{2^e facteur} \times \underbrace{(x+y)}_{3^e facteur} \times \underbrace{(x+y)}_{4^e facteur}$$

Quel est le coefficient de $x^2 \times y^2$?

preuve par récurrence de la formule du binôme

Désignons par $\mathcal{H}_n$ la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_n : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- initialisation : Nous allons montrer que $\mathcal{H}_0$ est vraie
- hérédité : Nous allons montrer que pour tout entier n si $\mathcal{H}_n$ est vraie alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

initialisation

montrons que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- $(x+y)^0 = 1$
- $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = 1$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$.

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.} \\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}
\end{aligned}$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}
\end{aligned}$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}
\end{aligned}$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}
\end{aligned}
$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on fait apparaitre un ensemble commun d'indice}
\end{aligned}
$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on fait apparaitre un ensemble commun d'indice}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe les deux sommes}
\end{aligned}$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on fait apparaitre un ensemble commun d'indice}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe les deux sommes}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{k} y^{n+1-k} + \binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on factorise}
\end{aligned}$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on fait apparaitre un ensemble commun d'indice}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe les deux sommes}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{k} y^{n+1-k} + \binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on factorise}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on applique la relation précédente}
\end{aligned}$$

Université de Lille

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^l y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on fait apparaitre un ensemble commun d'indice}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^l y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe les deux sommes}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on factorise}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on applique la relation précédente}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe la somme le premier et le dernier terme}
\end{aligned}$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on fait apparaitre un ensemble commun d'indice}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe les deux sommes}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{k} y^{n+1-k} + \binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on factorise}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on applique la relation précédente}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe la somme le premier et le dernier terme}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{Youpi, c'est fini, ouf !}
\end{aligned}
$$

hérédité

supposons que pour n donné, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.Montrons que cela a pour conséquence $\mathcal{H}_{n+1}$. Calculons donc $(x+y)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \quad \text{On utilise l'hypothèse de récurrence.}\\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue...}\\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on distribue à nouveau...}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}x\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}y\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \quad \text{on regroupe (commutativité...)}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{changement d'indice l=k+1 dans la première somme}\\
&= \left(\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on fait apparaitre un ensemble commun d'indice}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^{l} y^{n+1-l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe les deux sommes}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{k} y^{n+1-k} + \binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on factorise}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{on applique la relation précédente}\\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}\right) + y^{n+1} \quad \text{on regroupe la somme le premier et le dernier terme}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}\right) \quad \text{Youpi, c'est fini, ouf !}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} = 2^n$$

- Justification.
- interprétation combinatoire.

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

coefficients multinomiaux

Généralisation

on peut écrire une généralisation de la formule du binôme. x_1, x_2, … , x_t sont des variables (qui commutent deux à deux) n_1, n_2, … ,n_t sont des entiers naturels tel que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$ alors le coefficient de ${x_1}^{n_1}{x_2}^{n_2}\ldots{x_t}^{n_t}$ dans le développement de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n$ est

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$$

notation

On note ce nombre $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_t}$

formule du multinôme

hypothèse : x_1, x_2, ... x_t commutent.

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_t)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots n_t) \\ n_1+n_2+\ldots+n_t=n}} \binom{n}{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_t} {x_1}^{n_1} {x_2}^{n_2} \ldots {x_t}^{n_t}$$

Preuve

Une preuve combinatoire

On compte les mots en utilisant les arrangements avec plusieurs objets identiques.

Autre manière de compter

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_t} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2\cdots-n_{t-1}}{n_t}$$