Les principes fondamentaux du dénombrement

18 septembre 2018

Université de Lille

Exemple des cartes

Comptage du nombre de mains de 5 cartes au poker

On considére qu'un jeu de poker est le produit cartésien de $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; V; D; R\}$ par $C = \{\spadesuit; \heartsuit; \diamondsuit; \clubsuit\}$

Exemple des cartes

Comptage du nombre de mains de 5 cartes au poker

On considére qu'un jeu de poker est le produit cartésien de $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; V; D; R\}$ par $C = \{\spadesuit; \heartsuit; \diamondsuit; \clubsuit\}$

main

On appelle *main* le choix de 5 cartes dans le paquet sans tenir compte de l'ordre de ces 5 cartes.

Exemple des cartes

Comptage du nombre de mains de 5 cartes au poker

On considére qu'un jeu de poker est le produit cartésien de $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; V; D; R\}$ par $C = \{\spadesuit; \heartsuit; \diamondsuit; \clubsuit\}$

main

On appelle *main* le choix de 5 cartes dans le paquet sans tenir compte de l'ordre de ces 5 cartes.

Combien y a-t-il de mains de 5 cartes différentes ?

On dispose de n objet distincts. k désigne un entier naturel inférieur à n. On appelle combinaison de k objets parmi n toute selection de k objets choisis dans les n objets. avec aucune référence à l'ordre dans lequel les k objets choisis sont rangés.

On dispose de n objet distincts. k désigne un entier naturel inférieur à n. On appelle combinaison de k objets parmi n toute selection de k objets choisis dans les n objets. avec aucune référence à l'ordre dans lequel les k objets choisis sont rangés. Le nombre de combinaisons est noté $\binom{n}{k}$.

On dispose de n objet distincts. k désigne un entier naturel inférieur à n. On appelle combinaison de k objets parmi n toute selection de k objets choisis dans les n objets. avec aucune référence à l'ordre dans lequel les k objets choisis sont rangés. Le nombre de combinaisons est noté $\binom{n}{k}$.

comme le nombre de permutations de k objet est $k!$ on en déduit que

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

remarque

L'ancienne notation de $\binom{n}{p}$ est C_n^p.

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

remarque

L'ancienne notation de $\binom{n}{p}$ est C_n^p. On la rencontre encore parfois dans des livres.

Conseil

Lorsqu'on a affaire avec un problème de dénombrement, on doit se demander quelle est l'importance de l'ordre dans le problème. Lorsque l'ordre importe, on doit penser en termes de permutation et d'arrangement, et à la règle du produit. Lorsque l'ordre n'est pas important, les combinaisons peuvent jouer un rôle clé dans la résolution du problème

Un individu organise un repas festif pour des membres d'une association caritative. À cause de la taille de sa maison, il ne peut inviter que onze des vingt membres de l'association.

Un individu organise un repas festif pour des membres d'une association caritative. À cause de la taille de sa maison, il ne peut inviter que onze des vingt membres de l'association.

L'ordre n'est pas important donc il peut inviter "les onze chanceux" de $\binom{20}{11}$ façons.

Un individu organise un repas festif pour des membres d'une association caritative. À cause de la taille de sa maison, il ne peut inviter que onze des vingt membres de l'association.

L'ordre n'est pas important donc il peut inviter "les onze chanceux" de $\binom{20}{11}$ façons.

Toutefois après l'arrivée des 11, il doit les installer autour d'une table et c'est un problème d'arrangement.

Un individu organise un repas festif pour des membres d'une association caritative. À cause de la taille de sa maison, il ne peut inviter que onze des vingt membres de l'association.

L'ordre n'est pas important donc il peut inviter "les onze chanceux" de $\binom{20}{11}$ façons.

Toutefois après l'arrivée des 11, il doit les installer autour d'une table et c'est un problème d'arrangement.

Malheursement, aucun élément de la théorie des combinaisons et de permutations peut aider à gérer le problème des neuf offensés qui n'ont pas été invités !

Un étudiant passant un examen d'histoire, doit traiter sept des dix sujets proposés.

Un étudiant passant un examen d'histoire, doit traiter sept des dix sujets proposés.

Il n'y a aucune considération sur l'ordre, par conséquent l'étudiant peut répondre à l'examen de

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

Combien de mots différents peut on écrire avec les lettre de GHISSIGNIES ?

Combien de mots différents peut on écrire avec les lettre de GHISSIGNIES ?

Le nombre d'arrangements des lettres de GHISSIGNIES est

$$\frac{11!}{3!3!2!1!1!1!} = 554400$$

Combien de mots différents peut on écrire avec les lettre de GHISSIGNIES ?

Le nombre d'arrangements des lettres de GHISSIGNIES est

$$\frac{11!}{3!3!2!1!1!1!} = 554400$$

Mais combien sont tels qu'il n'y ait pas deux I côte à côte ?

Combien de mots différents peut on écrire avec les lettre de GHISSIGNIES ?

Le nombre d'arrangements des lettres de GHISSIGNIES est

$$\frac{11!}{3!3!2!1!1!1!} = 554400$$

Mais combien sont tels qu'il n'y ait pas deux I côte à côte ?

Si on oublie les I il y a

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!} = 3360$$

manière d'arranger les lettres restantes

$$.G.H.S.S.G.N.E.S.$$

Il reste à placer les I. Il faut donc choisir 3 points parmi les 9 qui ont été intercalés entre les lettres qui ne sont pas des I

En programmation, on considère certains arrangements, appelés *chaines* composées de symboles choisis dans un *alphabet* prédéfini.

Par exemple si l'alphabet est constitué de $\{0, 1, 2\}$ alors 01 11, 21, 12 et 20 sont 5 des neuf chaines de *longueur* 2

Parmi les 27 chaines de longueur trois on trouve 000, 012, 202, et 110.

On définit le poids d'une chaine en faisant la somme des chiffres. Par exemple : $poids(12) = 3$, $poids(22) = 4$, $poids(101) = 2$, $poids(210) = 3$, $poids(222) = 6$.

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair.

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles
- 2 fois le "1" : $\binom{10}{2}2^8$ mots possibles

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles
- 2 fois le "1" : $\binom{10}{2}2^8$ mots possibles
- 4 fois le "1" : $\binom{10}{4}2^6$ mots possibles

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles
- 2 fois le "1" : $\binom{10}{2}2^8$ mots possibles
- 4 fois le "1" : $\binom{10}{4}2^6$ mots possibles
- 6 fois le "1" : $\binom{10}{6}2^4$ mots possibles

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles
- 2 fois le "1" : $\binom{10}{2}2^8$ mots possibles
- 4 fois le "1" : $\binom{10}{4}2^6$ mots possibles
- 6 fois le "1" : $\binom{10}{6}2^4$ mots possibles
- 8 fois le "1" : $\binom{10}{8}2^2$ mots possibles

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles
- 2 fois le "1" : $\binom{10}{2}2^8$ mots possibles
- 4 fois le "1" : $\binom{10}{4}2^6$ mots possibles
- 6 fois le "1" : $\binom{10}{6}2^4$ mots possibles
- 8 fois le "1" : $\binom{10}{8}2^2$ mots possibles
- 10 fois le "1" : $1 = \binom{10}{10}2^0$ mots possibles

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles
- 2 fois le "1" : $\binom{10}{2}2^8$ mots possibles
- 4 fois le "1" : $\binom{10}{4}2^6$ mots possibles
- 6 fois le "1" : $\binom{10}{6}2^4$ mots possibles
- 8 fois le "1" : $\binom{10}{8}2^2$ mots possibles
- 10 fois le "1" : $1 = \binom{10}{10}2^0$ mots possibles

Parmi les 3^{10} chaînes de longueur 10, on souhaite déterminer combien ont un poids pair. De telles chaînes contiennent un nombre pair de 1

Il y a six cas à envisager.

- aucun "1" (0 est pair) : $1024 = 2^{10}$ mots possibles
- 2 fois le "1" : $\binom{10}{2}2^8$ mots possibles
- 4 fois le "1" : $\binom{10}{4}2^6$ mots possibles
- 6 fois le "1" : $\binom{10}{6}2^4$ mots possibles
- 8 fois le "1" : $\binom{10}{8}2^2$ mots possibles
- 10 fois le "1" : $1 = \binom{10}{10}2^0$ mots possibles

puis on additionne tous ces résultats puisque les cas envisagés sont deux à deux disjoints.

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{i=10} \binom{10}{i} 2^{10-i}$$

en faisant un changement de variable, en posant $i = 2j$.
L'indice j varie donc de 0 à 5.

$$\sum_{j=0}^{j=5} \binom{10}{2j} 2^{10-2j}$$

En python

Vous pouvez programmer le calcul de cette quantité en python.

symétrie

propriété

soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

justification

- par le calcul

symétrie

propriété

soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

justification

- par le calcul

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- par un argument combinatoire

symétrie

propriété

soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

justification

- par le calcul

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- par un argument combinatoire

Lorsqu'on « choisit » k éléments parmi n les $n-k$ éléments restants sont parfaitement définis. Il y a donc autant de manières de choisir $n-k$ éléments parmi n que d'en choisir k
plus formellement : l'application qui va de l'ensemble des parties de k éléments d'un ensemble E de n éléments dans l'ensemble des parties de E à $n-k$ éléments qui à un ensemble X associe le complémentaire de X est une bijection.