

# Les principes fondamentaux du dénombrement

9 septembre 2018

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

## le TLFi

Le trésor de la langue française informatisé est un dictionnaire créé par des universitaires. il est pratique car il permet de faire des recherches de plusieurs façon, dont une recherche « fonétik »...

- sens courant du mot discret
- sens du mot discret en Math

- 1 somme
  - exemples
- 2 la règle du produit
  - exemple
  - produit
  - exemples
  - exemples

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme  
exemples

la règle du  
produit

Si une tâche peut être accomplie de  $m$  manières, et si une autre tâche peut être accomplie de  $n$  manières. et si les deux tâches ne peuvent pas être réalisées simultanément, alors la réalisation d'une ou de l'autre des deux tâches peut être accomplie de  $m + n$  manières

## Formellement

La réunion de deux ensembles disjoints et finis est aussi un ensemble fini, dont le cardinal est la somme des cardinaux des deux ensembles.

$$\forall A \quad \forall B \quad \text{card}(A) = n \quad \text{card}(B) = m \quad A \cap B = \emptyset \implies \text{card}(A \cup B) = n + m$$

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme  
exemples

la règle du  
produit

## Rappels

- $\cap$  : intersection de deux ensembles
- $\cup$  : réunion de deux ensembles
- $\emptyset$  : ensemble vide
- *card* : nombre d'élément d'un ensemble fini

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme  
exemples

la règle du  
produit

Une bibliothèque dispose

- de 40 ouvrages de sociologie
- et de 50 ouvrages traitant d'anthropologie.

(on considère qu'il n'existe pas de livre traitant des deux sujets à la fois)

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme  
exemples

la règle du  
produit

Une bibliothèque dispose

- de 40 ouvrages de sociologie
- et de 50 ouvrages traitant d'anthropologie.

(on considère qu'il n'existe pas de livre traitant des deux sujets à la fois) En utilisant la règle de la somme, un étudiant a le choix entre  $40+50=90$  ouvrages pour en connaître un peu plus sur l'un des sujets.

Compter

La règle peut biensûr être étendue à plus de deux tâches, en prenant garde toutefois qu'il n'existe pas de tâche commune.

Mon trésor

table des  
matières

somme  
exemples

la règle du  
produit

Un enseignant en informatique possède 5 livres d'introduction sur chacun des langages

- Python,
- Ocaml,
- Javascript
- et C.



Compter

La règle peut biensûr être étendue à plus de deux tâches, en prenant garde toutefois qu'il n'existe pas de tâche commune.

Mon trésor

table des  
matières

somme  
exemples

la règle du  
produit

Un enseignant en informatique possède 5 livres d'introduction sur chacun des langages

- Python,
- Ocaml,
- Javascript
- et C.

peut recommander l'un de ces 20 ouvrages pour un étudiant intéressé dans l'apprentissage d'un premier langage de programmation

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme  
**exemples**

la règle du  
produit

Le même enseignant a deux collègues.

- L'un des collègues possède trois livres sur l'algorithmique,
- l'autre en possède cinq.

on désigne par  $n$  le nombre de livres que cet enseignant peut leur emprunter.

Compter

Cet exemple introduit la règle du produit.

Pour prendre une décision sur l'extension d'une usine, un administrateur affecte 12 employés dans deux commissions. La commission A est composée de 5 membres et doit envisager toutes les conséquences favorables d'une telle extension. La commission B est composée de 7 autres membres et doit prévoir les conséquences défavorables.

Si l'administrateur ne devait choisir qu'un membre parmi ces deux commissions, il aurait douze choix possibles.

Toutefois l'administrateur décide de rencontrer un membre choisi dans chacune des commissions.

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

**exemple**

produit

exemples

exemples

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

**produit**

exemples

exemples

Si une procédure peut être découpée en deux étapes, et qu'il y a  $m$  façons possibles de réaliser la première étape, et qu'il y a  $n$  façons possibles de réaliser la seconde étape, alors la procédure peut être accomplie de  $nm$  façons.

## Formellement

Le produit cartésien de deux ensembles finis est aussi un ensemble fini, dont le cardinal est le produit des cardinaux des deux ensembles.

$$\forall A \quad \forall B \quad \text{card}(A) = n \quad \text{card}(B) = m \implies \text{card}(A \times B) = n.m$$

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple  
produit  
**exemples**  
exemples

couleurs

$$C = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$$

hauteurs

$$H = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$$

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

produit

**exemples**

exemples

$$C \times H = \left\{ \begin{array}{l} (\spadesuit, 7), (\spadesuit, 8), (\spadesuit, 9), (\spadesuit, 10), (\spadesuit, V), (\spadesuit, D), (\spadesuit, R), (\spadesuit, A), \\ (\heartsuit, 7), (\heartsuit, 8), (\heartsuit, 9), (\heartsuit, 10), (\heartsuit, V), (\heartsuit, D), (\heartsuit, R), (\heartsuit, A), \\ (\diamondsuit, 7), (\diamondsuit, 8), (\diamondsuit, 9), (\diamondsuit, 10), (\diamondsuit, V), (\diamondsuit, D), (\diamondsuit, R), (\diamondsuit, A), \\ (\clubsuit, 7), (\clubsuit, 8), (\clubsuit, 9), (\clubsuit, 10), (\clubsuit, V), (\clubsuit, D), (\clubsuit, R), (\clubsuit, A) \end{array} \right\}$$

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

produit

**exemples**

exemples

Le club théâtre d'une université fait des essais pour la pièce de printemps. Six hommes et huit femmes passent des auditions pour les premiers rôles masculin et féminin. En utilisant la règle du produit, on peut affirmer qu'il existe  $6 \times 8$  c'est à dire 48 couples possibles

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

produit

exemples

exemples

Le club théâtre d'une université fait des essais pour la pièce de printemps. Six hommes et huit femmes passent des auditions pour les premiers rôles masculin et féminin. En utilisant la règle du produit, on peut affirmer qu'il existe  $6 \times 8$  c'est à dire 48 couples possibles



Un fabricant de moteurs numérote ses moteurs produits en utilisant deux lettres suivies de quatre chiffres

- 1 si des répétitions de lettres et de chiffres sont autorisées combien y a t'il de numéros possibles ?
- 2 si des répétitions sont autorisées, combien de numéros sont composés uniquement de voyelles et de chiffres pairs ?

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

produit

exemples

exemples

on désigne par  $L$  l'ensemble des lettres. L'énoncé est imprécis. Il ne dit pas si on doit tenir compte de la casse ou pas.

Considérons que  $\text{card}(L) = 26$

De la même manière, on désigne par  $C$  l'ensemble des chiffres.  $\text{card}(C) = 10$

$$\begin{array}{cccccc} 26 & \times & 26 & \times & 10 & \times & 10 & \times & 10 & \times & 10 \\ 1^{\text{re}} & & 2^{\text{e}} & & 3^{\text{e}} & & 4^{\text{e}} & & 5^{\text{e}} & & 6^{\text{e}} \\ \text{position} & & \text{pos.} & & \text{pos.} & & \text{pos.} & & \text{pos.} & & \text{pos.} \end{array}$$

Ce qui donne 6760000 numéros possibles. On peut remarquer que l'ensemble des numéros possibles est décrit par le produit cartésien :

$$L \times L \times C \times C \times C \times C$$

Ce qu'on note aussi

$$L^2 \times C^4$$

Compter

Même méthode :

L'énoncé est imprécis. Qu'est ce qu'une voyelle. Donnons en extension l'ensemble des voyelles :

$$V = \{A, E, I, O, U, Y\}$$

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

On a  $\text{card}(V) = 6$  et  $\text{card}(P) = 5$

$$\begin{array}{cccccc} 6 & \times & 6 & \times & 5 & \times & 5 & \times & 5 & \times & 5 \\ 1^{\text{re}} & & 2^{\text{e}} & & 3^{\text{e}} & & 4^{\text{e}} & & 5^{\text{e}} & & 6^{\text{e}} \\ \text{position} & & \text{pos.} & & \text{pos.} & & \text{pos.} & & \text{pos.} & & \text{pos.} \end{array}$$

Ce qui donne 22500 numéros possibles. Comme précédemment l'ensemble des numéros possibles est décrit par le produit cartésien :

$$V \times V \times P \times P \times P \times P$$

Ce qu'on note aussi

$$V^2 \times P^4$$

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

produit

exemples

exemples

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

produit

exemples

exemples

Trouver une suite de commandes Python qui fabrique la liste de toutes les chaînes de caractères pour les question 1 et 2.

- et si aucune lettre et aucun chiffre ne peut être répété  
combien y a t'il de numéros possibles ?

### À faire

Réfléchir à cette question pour le prochain cours qui a lieu  
mercredi 12/9

Compter

Mon trésor

table des  
matières

somme

la règle du  
produit

exemple

produit

exemples

**exemples**