Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé nº 1— le 23 octobre 2018

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les exercices sont indépendants. Le barème est sur 20 points. Toute réponse doit être **justifiée**. Calculatrice et documents interdits.

Exercice 1 [5 points]

Une carte bancaire possède un numéro unique composé de seize chiffres décimaux.

Q 1.1 [1 point] Combien peut-il y avoir de numéros de cartes bancaires différents ?

Éléments de réponse

Il peut y avoir 10^{16} numéros possibles car on applique la règle du produit. le numéro est composé de seize chiffres décimaux, donc pour chaque position on a dix choix possible, il y aura donc :

$$\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{16 fois} = 10^{16}$$

Un numéro de cartes bancaires comporte :

— 2 fois le chiffre 1
— 1 fois le chiffre 3
— 2 fois le chiffre 4
— 3 fois le chiffre 5
— 2 fois le chiffre 6
— 2 fois le chiffre 7
— 4 fois le chiffre 9

Q 1.2 [1 point] Combien de numéros de cartes bancaires possèdent les mêmes caractéristiques que celle citée ?

Éléments de réponse

On doit compter le nombre de mots de seize caractères dont la composition est précisée dans l'énoncé, je note n_1 le nombre de 1, n_3 le nombre de 3 n_4 le nombre de 4, n_5 le nombre de 5, n_6 le nombre de 6, n_7 le nombre de 7 et enfin n_9 le nombre de 9. On a $n = n_1 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_9 = 16$ et le nombre de mots est :

$$\frac{n!}{n_1!n_3!n_4!n_5!n_6!n_7!n_9!} = \frac{16!}{2 \times 1 \times 2 \times 6 \times 2 \times 2 \times 24} = 9081072000$$

— 2 fois le chiffre 1
— 1 fois le chiffre 3
— 2 fois le chiffre 4
— 3 fois le chiffre 5
— 2 fois le chiffre 6
— 2 fois le chiffre 7
— 4 fois le chiffre 9

On donne le code suivant :

```
def compte_occurrence(chaine):
    """ determine les nombres d'occurences
    de chaque chiffre dans la chaine passee
    en parametre
```

```
    :param chaine:
    :type chaine:(str)
    :return: une liste d'entiers de longueur 10 qui
    contient dans chaque case d'indice i
    le nombre d'apparitions du chiffre i dans
    la chaine
    :rtype: (list)
    :CU: la longueur de la chaine est 16 et
    tous les caracteres de la chaine sont des
    chiffres.
    :ExU:

    >>> compte_occurrence("0000111122226789")
    [4, 4, 4, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
    """
    assert len(chaine)==16
    assert all( "0"<=c<="9" for c in chaine)
    li=[0]*10
    for c in chaine:
        li[int(c)]=li[int(c)]+1
    return li
```

Q 1.3 [1 point] Située juste avant l'instruction `return`, que vaudrait l'expression `sum(li)` ?

Éléments de réponse

On va prouver que l'invariant de boucle suivant est conservé : « `sum(li)` est toujours égal au nombre de caractères parcourus ». En effet :

- initialement :aucun caractère n'a encore été parcourus et `sum(li)` vaut 0.
- à chaque tour de boucle, il y a un caractère de plus qui est traité et exactement une case de `li` est incrémentée.

Ainsi à la sortie de la boucle, on a nécessairement `sum(li)` égal à 16.

Q 1.4 [2 points] Combien de résultats différents peuvent être produits par la fonction `compte_occurrence` lorsqu'on l'utilise en respectant les contraintes d'utilisation ?

Éléments de réponse

Il suffit de voir que les sorties sont caractérisées par un décuplet d'entiers naturels tels que la somme est égale à 16. On peut donc dénombrer le nombre de tels décuplets. Il suffit de compter les mots de 25 caractères composés de (10-1)=9 signes `"+"` et de 16 `"."`. Il y en a $\binom{25}{9}$

Exercice 2 [5 points]

Un distributeur de bonbons est rempli de bonbons chocolatés contenant une cacahuète enrobé d'une couche de colorant alimentaire. On suppose qu'il y a quatre couleurs rouge, jaune, bleu, vert. Pour une somme modique, une dose de dix bonbons est distribuée dans un sachet en papier.

Q 2.1 [1 point] Combien y a-t-il de compositions de sachet possibles ?

Éléments de réponse

Cela revient à compter le nombre de mots de treize caractères sur l'alphabet $X = \{., |\}$ qu'on peut écrire avec exactement trois barres | et dix points .. Il y en a $\binom{13}{3}$.

Q 2.2 [1 point] Combien y a-t-il de compositions de sachet qui comportent au moins cinq jaunes ?

Éléments de réponse

On prend déjà cinq jaunes et on compléte ensuite avec cinq bonbons. Comptons les manières de compléter. Cela revient à compter les mots de huit caractères sur l'alphabet $X = \{., |\}$ qu'on peut écrire avec exactement trois barres $|$ et cinq points .. Il y en a $\binom{8}{3}$.

Q 2.3 [1 point] Combien y a-t-il de compositions sans vert ?

Éléments de réponse

Cela revient à compter les mots de douze caractères sur l'alphabet $X = \{., |\}$ qu'on peut écrire avec exactement deux barres $|$ et dix points .. Il y en a $\binom{12}{2}$.

Q 2.4 [2 points] Combien y a-t-il de compositions de sachet bichromatiques (exactement deux des couleurs sont présentes dans le sachet) ?

Éléments de réponse

Compter le nombre de sachets composés de bonbons jaunes et bleus (il faut qu'il y en ait au moins un de chaque couleur). On en met déja un jaune et un bleu dans le sachet et il reste à compléter par un mélange de 8 jaunes ou bleu. Cela revient, par conséquent, à compter les mots de neuf caractères sur l'alphabet $X = \{., |\}$ qu'on peut écrire avec exactement une barre $|$ et huit points .. Il y en a $\binom{9}{1} = 9$. Pour deux autres couleurs, on obtiendrait le même résultat. Or il y a $\binom{4}{2} = 6$ manière de choisir deux couleurs parmi les quatre. La réponse est donc 54.

Exercice 3 [3 points]

Q 3.1 [3 points] Démontrez la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad 0 \leq r \leq n \Longrightarrow \binom{n}{r} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{n+1}{k}$$

Éléments de réponse

soit n un entier, soit r tel que $0 \leq r \leq n$

- si $r = 0$
- si $r = n + 1$
- sinon on a $0 < r < n + 1$, calculons :

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{n+1}{k}$$

$$= (-1)^r + \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$= (-1)^r + \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{n}{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{n}{k} - \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^{r-l} \binom{n}{l}$$

$$= \binom{n}{r}$$

Exercice 4 [7 points]

La machine Enigma est un dispositif de chiffrement transportable, électromécanique qui a été utilisé par les Allemands lors de la seconde guerre mondiale. Elle permettait de chiffrer et de déchiffrer les messages afin de proteger leur confidentialité. L'idée de cet exercice est de calculer le nombre total d'éléments de l'espace des clés. Une clé est caractérisée par l'état de la machine juste avant le début du chiffrement.

— La machine est livrée avec cinq cylindres numérotés de 1 à 5,
— Chaque cylindre possède vingt-six positions, étiquetées par les lettres de A à Z,
— Dans la machine, on utilise seulement trois des cinq cylindres,
— L'ordre dans lequel sont insérés les cylindres dans la machine est important.
— Enfin sur le devant de la machine, il y a 26 fiches, étiquetées de A à Z et dix fils qui permettent de procéder à dix couplages entre deux lettres (voir illustration en fin de sujet).

Q 4.1 [1 point] Les trois cylindres étant déjà placés dans la machine, les couplages étant déjà réalisés, combien d'états différents peut prendre la machine ?

Éléments de réponse

Chaque cylindre peut prendre 26 positions. Il y a trois cylindres on a donc $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17576$ états différents

---

Q 4.2 [1 point] De combien de manière peut-on insérer trois des cinq cylindres dans la machine ?

Éléments de réponse

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3$$

Q 4.3 [2 points] On souhaite compter le nombre de manières de former dix paires de lettres avec les vingt premières lettres de l'alphabet. On propose la fonction suivante écrite en pseudo-code :

```
fonction fabrique_couplage()
  Initialiser un tas qui contient les vingt lettres.
  # a ce stade le tas contient un nombre pair de lettres
  Initialiser un ensemble vide
  tant que le tas n'est pas vide
  faire
    # a ce stade le tas contient un nombre pair de lettres
    extraire la plus petite lettre présente dans le tas.
    on l'appelle c1
    extraire du tas une lettre au hasard parmi les lettres restantes
    on l'appelle c2
    ajouter la paire {c1,c2} à l'ensemble
    # a ce stade le tas contient un nombre pair de lettres
  fait
  renvoyer ensemble
```

Combien de résultats différents peuvent être produits par des appels à la fonction `fabrique_couplage` ?

Éléments de réponse

$$19 \times 17 \times \ldots \times 3 \times 1 = \prod_{i=1}^{10} 2i - 1 = \frac{20!}{2^{10} \times 10!}$$

Q 4.4 [1 point]

Comptez maintenant le nombre de manières d'effectuer les dix couplages avec les vingt-six lettres. Il convient de choisir les six lettres parmi les vingt-six qui ne seront pas couplées, et enfin avec les vingt lettres restantes, on doit compter le nombre de manière de faire un ensemble de dix paires de lettres.

Éléments de réponse

$$\binom{26}{6} \frac{20!}{2^{10} \times 10!}$$

Q 4.5 [2 points] À l'aide des questions précédentes, déterminez le nombre de configurations initiales que possède la machine enigma.

Éléments de réponse

$$26^3 A_5^3 \binom{26}{6} \frac{20!}{2^{10} \times 10!}$$