

## Mathématiques Discrètes

---

Devoir surveillé n° 1— le 23 octobre 2018

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les exercices sont indépendants. Le barème est sur 20 points. Toute réponse doit être **justifiée**. Calculatrice et documents interdits.

### Exercice 1 [5 points]

Une carte bancaire possède un numéro unique composé de seize chiffres décimaux.

**Q 1.1 [1 point]** Combien peut-il y avoir de numéros de cartes bancaires différents ?

Un numéro de cartes bancaires comporte :

- 2 fois le chiffre 1
- 1 fois le chiffre 3
- 2 fois le chiffre 4
- 3 fois le chiffre 5
- 2 fois le chiffre 6
- 2 fois le chiffre 7
- 4 fois le chiffre 9

**Q 1.2 [1 point]** Combien de numéros de cartes bancaires possèdent les mêmes caractéristiques que celle citée ?

On donne le code suivant :

```
def compte_occurrence(chaine):
    """ determine les nombres d'occurrences
    de chaque chiffre dans la chaine passee
    en parametre
    :param chaine:
    :type chaine:(str)
    :return: une liste d'entiers de longueur 10 qui
    contient dans chaque case d'indice i
    le nombre d'apparitions du chiffre i dans
    la chaine
    :rtype: (list)
    :CU: la longueur de la chaine est 16 et
    tous les caracteres de la chaine sont des
    chiffres.
    :ExU:

    >>> compte_occurrence("0000111122226789")
    [4, 4, 4, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
    """
    assert len(chaine)==16
    assert all( "0"<=c<="9" for c in chaine)
    li=[0]*10
    for c in chaine:
        li[int(c)]=li[int(c)]+1
    return li
```

**Q 1.3 [1 point]** Située juste avant l'instruction `return`, que vaudrait l'expression `sum(li)` ?

**Q 1.4 [2 points]** Combien de résultats différents peuvent être produits par la fonction `compte_occurrence` lorsqu'on l'utilise en respectant les contraintes d'utilisation ?

### Exercice 2 [5 points]

Un distributeur de bonbons est rempli de bonbons chocolatés contenant une cacahuète enrobé d'une couche de colorant alimentaire. On suppose qu'il y a quatre couleurs rouge, jaune, bleu, vert. Pour une somme modique, une dose de dix bonbons est distribuée dans un sachet en papier.

**Q 2.1 [1 point]** Combien y a-t-il de compositions de sachet possibles ?

**Q 2.2 [1 point]** Combien y a-t-il de compositions de sachet qui comportent au moins cinq jaunes ?

**Q 2.3 [1 point]** Combien y a-t-il de compositions sans vert ?

**Q 2.4 [2 points]** Combien y a-t-il de compositions de sachet bichromatiques (exactement deux des couleurs sont présentes dans le sachet) ?

### Exercice 3 [3 points]

**Q 3.1 [3 points]** Démontrez la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad 0 \leq r \leq n \implies \binom{n}{r} = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{n+1}{k}$$

### Exercice 4 [7 points]



La machine Enigma est un dispositif de chiffrement transportable, électromécanique qui a été utilisé par les Allemands lors de la seconde guerre mondiale. Elle permettait de chiffrer et de déchiffrer les messages afin de protéger leur confidentialité. L'idée de cet exercice est de calculer le nombre total d'éléments de l'espace des clés. Une clé est caractérisée par l'état de la machine juste avant le début du chiffrement.

- La machine est livrée avec cinq cylindres numérotés de 1 à 5,
- Chaque cylindre possède vingt-six positions, étiquetées par les lettres de A à Z,
- Dans la machine, on utilise seulement trois des cinq cylindres,
- L'ordre dans lequel sont insérés les cylindres dans la machine est important.
- Enfin sur le devant de la machine, il y a 26 fiches, étiquetées de A à Z et dix fils qui permettent de procéder à dix couplages entre deux lettres (voir illustration en fin de sujet).

**Q 4.1 [1 point]** Les trois cylindres étant déjà placés dans la machine, les couplages étant déjà réalisés, combien d'états différents peut prendre la machine ?

**Q 4.2 [1 point]** De combien de manière peut-on insérer trois des cinq cylindres dans la machine ?

**Q 4.3 [2 points]** On souhaite compter le nombre de manières de former dix paires de lettres avec les vingt premières lettres de l'alphabet. On propose la fonction suivante écrite en pseudo-code :

```

fonction fabrique_couplage()
  Initialiser un tas qui contient les vingt lettres.
  # a ce stade le tas contient un nombre pair de lettres
  Initialiser un ensemble vide
  tant que le tas n'est pas vide
  faire
    # a ce stade le tas contient un nombre pair de lettres
    extraire la plus petite lettre présente dans le tas.
    on l'appelle c1
    extraire du tas une lettre au hasard parmi les lettres restantes
    on l'appelle c2
    ajouter la paire {c1,c2} à l'ensemble
  # a ce stade le tas contient un nombre pair de lettres
fait
renvoyer ensemble

```

Combien de résultats différents peuvent être produits par des appels à la fonction `fabrique_couplage` ?

**Q 4.4 [1 point]**

Comptez maintenant le nombre de manières d'effectuer les dix couplages avec les vingt-six lettres. Il convient de choisir les six lettres parmi les vingt-six qui ne seront pas couplées, et enfin avec les vingt lettres restantes, on doit compter le nombre de manière de faire un ensemble de dix paires de lettres.

**Q 4.5 [2 points]** À l'aide des questions précédentes, déterminez le nombre de configurations initiales que possède la machine enigma.

