

Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 3— le 14 juin 2018

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 2 exercices. Les exercices sont indépendants. Le barème est sur 10 points. Le total obtenu est laissé sur 20. Toute réponse doit être **justifiée**.

Exercice 1 [3 points]

Un jour de vacances de printemps, particulièrement froid et pluvieux, le professeur de Maths-discrètes décide de faire des crêpes. Pour accompagner les crêpes, il dispose de confiture de pêches, de confiture de mûres, de pâte à tartiner chocolatée à la noisette, de chocolat à dessert noir fondu, de citron, de cassonade.

Q 1.1 [1 point] En supposant, qu'il souhaite préparer des crêpes avec exactement deux accompagnements différents. Combien de type de crêpes garnies différentes peut-il réaliser. (et ceci sans tenir compte des éventuelles considérations gastronomiques ou diététiques...)

Q 1.2 [1 point] Même question s'il souhaite mettre au plus quatre accompagnements. On décide maintenant de ne mettre qu'un seul accompagnement par crêpes. Les stocks de garnitures sont limités, il n'y a de quoi faire que :

- 3 crêpes à la confiture de pêches,
- 5 crêpes à la confiture de mûres,
- 7 crêpes à la pâte à tartiner,
- 1 crêpe au chocolat noir fondu,
- 1 crêpe au citron,
- 3 crêpes à la cassonade.

Q 1.3 [1 point] On lui fait une commande de 10 crêpes. Combien y a-t-il de commandes,

Exercice 2 [7 points]

Une relation binaire \mathcal{R} est définie sur l'ensemble des mots bien parenthésés B sur l'alphabet X à deux éléments (et) de la manière suivante :

- le mot vide (ε) est en relation avec lui-même : $\varepsilon \mathcal{R} \varepsilon$
- le mot vide n'est en relation avec aucun autre mot :

$$\forall (u, v) \in B^2 \quad \neg(\varepsilon \mathcal{R}(u)v)$$

- aucun mot non vide n'est en relation avec le mot vide :

$$\forall (u, v) \in B^2 \quad \neg((u)v \mathcal{R} \varepsilon)$$

- et pour deux mots non vides :

$$\forall (u, v, u', v') \in B^4 \quad (u)v \mathcal{R}(u')v' \iff (u \mathcal{R}u' \wedge v \mathcal{R}v') \vee (u \mathcal{R}v' \wedge v \mathcal{R}u')$$

Q 2.1 [2 points] On considère —dans cette question— les mots bien parenthésés de longueur au plus 4. Combien y en a-t-il ? Faites-en la liste. Remplissez un tableau à double entrées dont les entêtes de lignes et de colonnes sont les mots bien parenthésés de longueur au plus 4 et mettez dans la case correspondant au couple (a, b) le résultat de $a \mathcal{R} b$. (on mettra V pour vrai et F pour faux).

Q 2.2 [1 point] Démontrez que si deux mots bien parenthésés sont en relation \mathcal{R} alors ils ont la même taille.

Q 2.3 [1 point] La réciproque est-elle vraie ?

- Q 2.4 [1 point]** La relation \mathcal{R} est-elle reflexive ?
- Q 2.5 [1 point]** La relation \mathcal{R} est-elle symétrique ?
- Q 2.6 [1 point]** La relation \mathcal{R} est-elle antisymétrique ?

Fin.