Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 2— le 20 décembre 2017

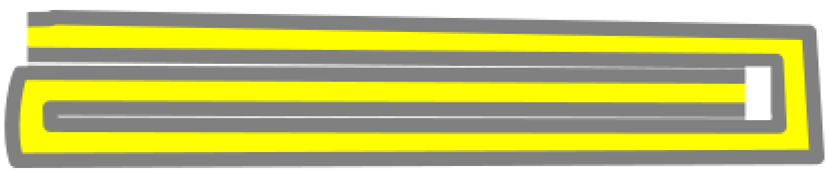
Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 3 exercices. Les exercices sont indépendants. Le barème est sur 23 points. Le total obtenu est laissé sur 20. Toute réponse doit être **justifiée**.

Exercice 1 [6 points]

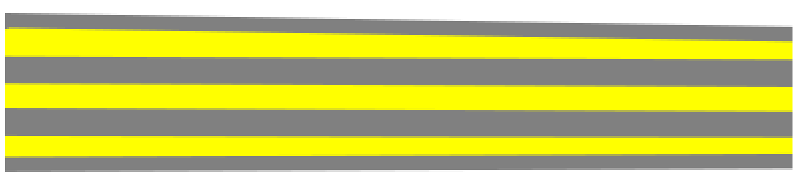
Pour réaliser de la pâte feuilletée, on fabrique une pâte. On place du beurre sur la pâte et on remet de la pâte au-dessus.

Initialement, on peut considérer qu'il y a de la pâte puis du beurre, puis de la pâte.

Ensuite, on répète la procédure suivante : on étale, on replie en 3.



Lors de cette phase les couches de pâtes qui ne sont pas séparées par du beurre fusionnent comme le montre la figure suivante.



On désigne par u_n le nombre de couches de pâte séparées par du beurre, au bout de l'étape n.

Q 1.1 [1 point] Donnez les valeurs de u_0, u_1, u_2.

Éléments de réponse

la valeur initiale est 2. C'est donné dans l'énoncé.

$$u_0 = 2$$

D'après la figure, à l'étape 1, après la fusion il reste quatre couches de pâte.

$$u_1 = 4$$

Pour l'étape suivante, on replie encore en trois, et quatres couches fusionnent ce qui diminue de deux le nombre de couches...

$$u_2 = 3 * 4 - 2 = 10$$

Q 1.2 [1 point] Donnez la relation qui lie u_{n+1} aux termes précédents.
Éléments de réponse

À chaque étape le nombre de couches triple, et quatre fusionnent.

$$u_{n+1} = 3u_n - 2$$

Q 1.3 [1 point] Quel est le type de cette suite ? *Éléments de réponse*

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. (suite récurrente linéaire à coefficients constants d'ordre 1 non homogène)

Q 1.4 [1 point] Donnez une expression de u_n en fonction de n. *Éléments de réponse*

On cherche une solution constante. $c = 3c - 2$
$2c = 2$ donc $c = 1$.
la suite $u_n - c$ est géométrique de raison 3.

$$u_n - c = (u_0 - c)3^n$$

$$u_n = 1 + (2 - 1)3^n = 1 + 3^n$$

Q 1.5 [1 point] Combien d'étapes sont nécessaires pour obtenir au moins mille couches de pâte ?
Éléments de réponse

On doit trouver le plus petit indice n tel que $u_n \geq 1000$ $u_n > geq1000$ cela donne $3^n \geq 999$ en passant au logarithme

$$n \log 3 \geq \log 999$$

$$n \geq \frac{\log 999}{\log 3}$$

$$n \geq 7$$

.

Q 1.6 [1 point] Peut-on réaliser un mille-feuilles (précisément) avec cette recette ? *Éléments de réponse*

Non car 999 n'est pas une puissance de 3.

Exercice 2 [5 points]

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 3$$

$$u_1 = 10$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$$

Q 2.1 [1 point] Quel est ce type de suite ?

Éléments de réponse

> Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 homogéne à coefficients constants.

Q 2.2 [1 point] Donnez une expression de u_n en fonction de n *Éléments de réponse*

> On cherche les suites géométriques (non nulles) qui satisfont l'équation de récurrence. elle doivent vérifier$Kr^{n+2} = 6Kr^{n+1} - 8Kr^n$. K et non nulle r non plus. on peut diviser par Kr^n cela nous permet d'obtenir l'équation caractèristique $r^2 = 6r - 8$ c'est-à-dire $r^2 - 6r + 8 = 0$. Cette équation du second degré dont les racines sont 2 et 4. On a donc deux suites géométrique de raison 2 et 4. Toute solution s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux suites.
>
> $$u_n = k2^n + l4^n$$
>
> Grâce aux premier termes on peut déterminer les constants k et l
>
> $$\left\{ \begin{array}{ccc} k+l & = & 3 \\ 2k+4l & = & 10 \end{array} \right\}$$

On donne le code suivant :

```
def v(n):
    """ calcule le terme d'indice $n$ d'une suite numérique
        :param n: (int)
        :return: (number)
        :CU: n>=0
    """
    if n==0:
       res=8  #2**3
    elif n==1:
       res=1024 # 2**10
    else:
       res= (v(n-1)**6)/(v(n-2)**8)
    return res
```

Q 2.3 [1 point] Traduire mathématiquement la définition de la suite v. De quelle nature est la suite v ?

Éléments de réponse

> $$v_0 = 8$$
>
> $$v_1 = 1024$$
>
> $$v_{n+2} = \frac{v_{n+1}^6}{v_n^8}$$
>
> C'est une suite récurrente d'ordre 2. Elle n'est pas linéaire.

Q 2.4 [1 point] Combien y a-t-il d'appels à `v` lors du calcul de `v(n)` ? *Éléments de réponse* c'est donné par la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Il s'agit de la suite de Fibonacci .

Q 2.5 [1 point] À quelle relation de récurrence obéit la suite (w_n) définie par $w_n = \log_2(v_n)$. En déduire une expression de v_n directement en fonction de n. *Éléments de réponse*

La relation est la meme que celle de la suite u_n et $w_0 = u_0$ et $w_1 = u_1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} log_2(v_n) = u_n$$

donc

$$v_n = 2^{(2^n + 2.4^n)}$$

Exercice 3 [12 points]

On veut définir la structure des arbres ternaires dont les nœuds ne sont pas étiquetés.

On pose $X_0 = \{\Delta\}$.

Puis, on définit une suite d'ensemble ainsi :

$$X_{n+1} = X_n \cup (X_n \times X_n \times X_n)$$

Q 3.1 [1 point] Que valent X_1 et X_2 ? *Éléments de réponse*

$$X_1 = \{\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta)\}$$

$$X_2 = \{\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), ((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, \Delta), (\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta), (\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta))\}$$

On définit maintenant l'ensemble X comme la réunion de tous les X_n.

Q 3.2 [1 point] L'ensemble X ainsi défini est-il dénombrable ?

Éléments de réponse

On peut démontrer par récurrence sur n que pour tout entier n, l'ensemble X_n est fini.
C'est la réunion de deux ensembles fini. (le second est le produit cartésien de trois ensembles fini).
X est donc une réunion dénombrable d'ensemble fini ou dénombrable, il est donc dénombrable.

On souhaite définir une application taille de X dans $\mathbb{N}$.

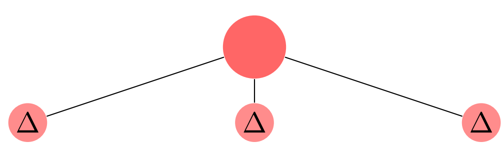
On pose :

— $taille(\Delta) = 0$ et

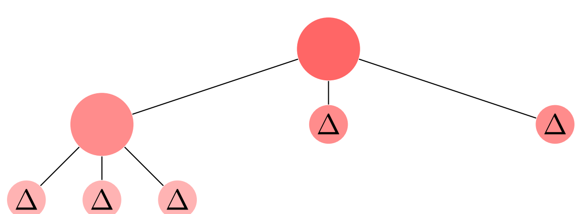
— $taille((A, B, C)) = 1 + taille(A) + taille(B) + taille(C)$

On convient de représenter graphiquement les éléments de X par des arbres ternaires.

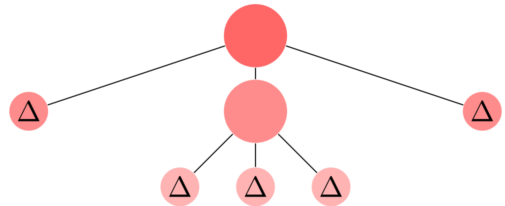
Représentation de Δ.



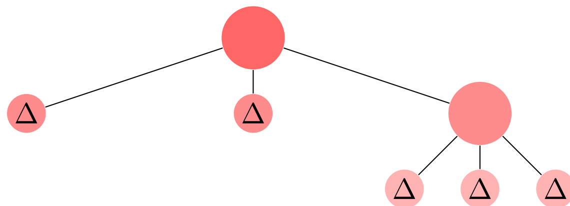
Représentation de (Δ, Δ, Δ).



Représentation de $((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, \Delta)$.



Représentation de $(\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta)$.



Représentation de $(\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta))$.

Q 3.3 [1 point] Calculez les tailles des cinq arbres précédents. *Éléments de réponse*

le premier est de taille 0, le suivant est de taille 1, puis les trois derniers sont de taille 2. Justification, d'après la définition de la fonction taille, la valeur de $taille(\Delta)$ vaut 0. Le calcul de taille((Δ,Δ,Δ)) est

$$1 + taille(\Delta) + taille(\Delta) + taille(\Delta) = 1 + 0 + 0 + 0$$

Ensuite pour les trois arbres suivant on arespectivement :

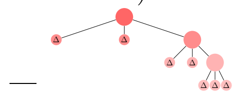
$$taille(((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, \Delta)) = 1 + taille((\Delta, \Delta, \Delta)) + taille(\Delta) + taille(\Delta) = 1 + 1 + 0 + 0 = 2$$

$$taille((\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta)) = 1 + taille((\Delta, \Delta, \Delta)) + taille(\Delta) + taille(\Delta) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

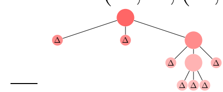
$$taille((\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta))) = 1 + taille(\Delta) + taille(\Delta) + taille((\Delta, \Delta, \Delta)) = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

Q 3.4 [1 point] Dessinez les éléments de X de taille 3. Combien y en a-t-il ? *Éléments de réponse*

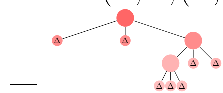
Il y en a 3 obtenus en ajoutant un fils au nœud de niveau 1, pour chaque arbre de taille 2. Cela nous fait donc déja neuf arbres. On peut aussi ajouter un fils au nœud de niveau 0. il y a trois arbres en tout (trois manières de choisir le fils qu'on laisse vide). Au total, on doit donc obtenir 12 arbres.



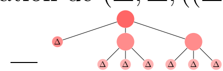
Représentation de $(\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta)))$



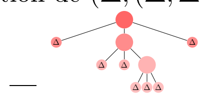
Représentation de $(\Delta, \Delta, (\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta))$



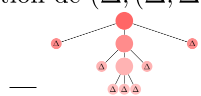
Représentation de $(\Delta, \Delta, ((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, \Delta))$



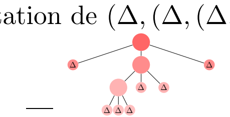
Représentation de $(\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), (\Delta, \Delta, \Delta))$



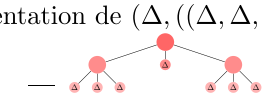
Représentation de $(\Delta, (\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta)), \Delta)$



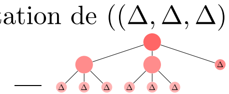
Représentation de $(\Delta, (\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta), \Delta)$



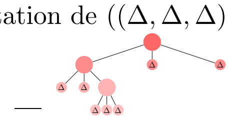
Représentation de $(\Delta, ((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, \Delta), \Delta)$



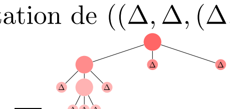
Représentation de $((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta))$



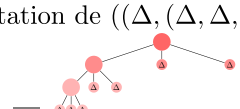
Représentation de $((\Delta, \Delta, \Delta), (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta)$



Représentation de $((\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta)), \Delta, \Delta)$



Représentation de $((\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta), \Delta, \Delta)$



Représentation de $(((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, \Delta), \Delta, \Delta)$

On pose u_n le nombre d'éléments de X de taille exactement n

Q 3.5 [1 point] Sans dessiner les arbres, expliquez comment calculer u_4 ?

Éléments de réponse

un arbre de taille 4, va avoir un sous arbre gauche A, un sous arbre central B et un sous arbre droit C. la somme des tailles de ces trois sous arbres sera donc 3. Une fois le triplet de tailles choisi, on compte tous les arbres possibles avec ce triplet de taille.

$$\begin{aligned} u_4 &= u_3u_0u_0 + u_0u_3u_0 + u_0u_0u_3 \\ &\quad +u_2u_1u_0 + u_2u_0u_1 + u_1u_2u_0 + u_0u_2u_1 + u_1u_0u_2 + u_0u_1u_2 \\ &\quad +u_1u_1u_1 \\ &= 12 + 12 + 12 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Q 3.6 [1 point] Donnez une relation de récurrence reliant u_{n+1} aux termes précédents de la suite. Cette équation est-elle linéaire ? Possède-t-elle un ordre ?

Éléments de réponse

On généralise la méthode décrite à la question précédente :

$$u_{n+1} = \sum_{k+l+m=n} u_k u_l u_m$$

Cette relation n'est pas linéaire, et ne possède pas un ordre fini.

On considère l'application f de X dans l'ensemble A^* des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Dans A^* on représente le mot vide par ε. f est définie par

- $f(\Delta) = \varepsilon$
- $f((A, B, C)) = aaf(A)bf(B)bf(C)$.

Vous pourrez admettre que f est bien définie sur X.

Q 3.7 [1 point] Calculez $f((\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta)))$

Éléments de réponse

On souhaite calculer $f((\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta)))$. C'est de la forme $f((A, B, C))$ avec $A = \Delta$ $B = \Delta$ et $C = (\Delta, \Delta, \Delta)$. Donc cela vaut $aaf(A)bf(B)bf(C)$ or $f(A) = \varepsilon$ et $f(B) = \varepsilon$ et $f(C) = aabb$ donc $f((\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta))) = aabbaabb$

Q 3.8 [1 point] $aaabbb$ possède-t-il un antécédent par f ? *Éléments de réponse*

Non car a doit apparaître un nombre pair de fois.

Q 3.9 [1 point] Démontrez par récurrence que

$$\forall x \in X \quad |f(x)| = 4taille(x)$$

.

Éléments de réponse

On va le démontrer par récurrence.

$$H_n : \forall xinX_n |f(x) = 4taille(x)$$

Si $x \in X_0$, alors $x = \Delta$, $f(x) = \varepsilon$, donc $|f(x)| = 0 = 4 \times 0$. Supposons H_n vraie. Prouvons H_{n+1}. Soit $x \in X_{n+1}$ alors

- ou bien $x \in X_n$, et on a déjà ce qu'on souhaite, par hypothèse de récurrence.
- ou bien $x \in X_n \times X_n \times X_n$ donc $x = (A, B, C)$ et $f(x) = aaf(A)bf(B)bf(C)$. mais $taille(x) = 1 + taille(A) + taille(B) + taille(C)$ et $|f(x)| = 2 + |f(A)| + 1 + |f(B)| + 1 + |f(C)|$, par conséquent $|f(x)| = 4 + 4taille(A) + 4taille(B) + 4taille(C) = 4taille(x)$

Ce qui prouve que H_{n+1} est conséquence de H_n ceci pour tout entier n.

Q 3.10 [1 point] f est-elle injective ? *Éléments de réponse* oui. Mais préalablement, remarquons que pour tout arbre x, son image par f, est un mot de Dyck sur l'alphabet $\{a, b\}$, contenant un nombre pair de a. (preuve élémentaire à faire par récurrence). Supposons que f ne soit pas injective. Considérons l'ensemble C des éléments x de X tel qu'il existe un autre élément x' de X qui ait la même image par f. C serait donc non vide. Parmi les éléments de C on pourrait en choisir un de taille minimale. Nous appelerions cet éléments x_0. D'abord cela ne pourrait pas être l'arbre vide Δ. En effet l'arbre vide Δ est le seul arbre de taille 0. Donc d'après la question précédente, on sait que le seul élément de X qui s'envoie sur le mot vide ε est l'arbre vide Δ. Cela serait donc nécessairement un triplet (A, B, C) où A, B et C sont des arbres ternaires de taille inférieure à celle de x_0. Mais comme il existerait un autre arbre x'_0 tel que $f(x_0) = f(x'_0)$. Cet x'_0 ne pourrait pas être l'arbre vide. cela serait donc un autre triplet (A', B', C'). On a $f(x_0) = f(x'_0)$ donc $aaf(A)bf(B)bf(C) = aaf(A')bf(B')bf(C')$ comme $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(A')$, $f(C')$ et $f(C')$ sont bien parenthésés. cela donne $f(A) = f(A')$,$f(B) = f(B')$ $f(C) = f(C')$. Or $A \neq A'$ ou bien $B \neq B'$ ou bien $C \neq C'$, ce qui contredit la minimalité de la taille de x_0.

Q 3.11 [1 point] f est-elle surjective ? *Éléments de réponse*

non, on a vu précédemment que $aaabbb$ n'a pas d'antécédent par f.

Q 3.12 [1 point] Prouvez que le nombre d'éléments de X de taille n est inférieur ou égal à $\frac{\binom{4n}{2n}}{2n+1}$.

Éléments de réponse

- toute image par f est un mot de Dyck.
- si a est un arbre de taille n le mot de Dyck obtenu est de longueur 4n.
- l'application f est injective.
- le nombre de mots de Dyck de longueur $4n$ est $\frac{\binom{4n}{2n}}{2n+1}$
- le nombre d'arbres ternaires de taille n est donc inférieur au nombre de mots de Dyck de longueur $4n$

Fin.