**Mathématiques Discrètes**

Devoir surveillé n° 2— le 20 décembre 2017

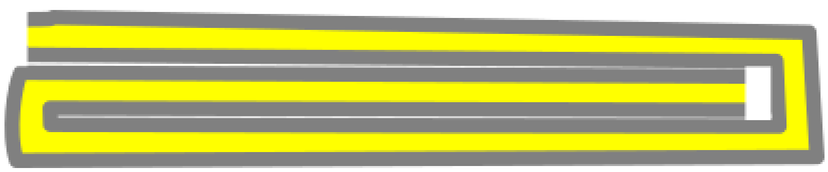
Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 3 exercices. Les exercices sont indépendants. Le barème est sur 23 points. Le total obtenu est laissé sur 20. Toute réponse doit être **justifiée**.

## Exercice 1 [6 points]

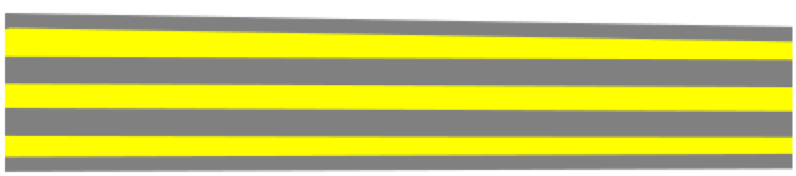
Pour réaliser de la pâte feuilletée, on fabrique une pâte. On place du beurre sur la pâte et on remet de la pâte au-dessus.

Initialement, on peut considérer qu'il y a de la pâte puis du beurre, puis de la pâte.

Ensuite, on répète la procédure suivante : on étale, on replie en 3.



Lors de cette phase les couches de pâtes qui ne sont pas séparées par du beurre fusionnent comme le montre la figure suivante.



On désigne par $u_n$ le nombre de couches de pâte séparées par du beurre, au bout de l'étape $n$.

**Q 1.1 [1 point]** Donnez les valeurs de $u_0$, $u_1$, $u_2$.

**Q 1.2 [1 point]** Donnez la relation qui lie $u_{n+1}$ aux termes précédents.

**Q 1.3 [1 point]** Quel est le type de cette suite ?

**Q 1.4 [1 point]** Donnez une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Q 1.5 [1 point]** Combien d'étapes sont nécessaires pour obtenir au moins mille couches de pâte ?

**Q 1.6 [1 point]** Peut-on réaliser un mille-feuilles (précisément) avec cette recette ?

Tournez, s'il vous plait

## Exercice 2 [5 points]

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 3$$

$$u_1 = 10$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$$

**Q 2.1 [1 point]** Quel est ce type de suite ?

**Q 2.2 [1 point]** Donnez une expression de $u_n$ en fonction de $n$

On donne le code suivant :

```
def v(n):
    """ calcule le terme d'indice $n$ d'une suite numérique
        :param n: (int)
        :return: (number)
        :CU: n>=0
    """
    if n==0:
       res=8  #2**3
    elif n==1:
       res=1024 # 2**10
    else:
       res= (v(n-1)**6)/(v(n-2)**8)
    return res
```

**Q 2.3 [1 point]** Traduire mathématiquement la définition de la suite $v$. De quelle nature est la suite $v$ ?

**Q 2.4 [1 point]** Combien y a-t-il d'appels à `v` lors du calcul de `v(n)` ?

**Q 2.5 [1 point]** À quelle relation de récurrence obéit la suite $(w_n)$ définie par $w_n = \log_2(v_n)$. En déduire une expression de $v_n$ directement en fonction de $n$.

## Exercice 3 [12 points]

On veut définir la structure des arbres ternaires dont les nœuds ne sont pas étiquetés.

On pose $X_0 = \{\Delta\}$.

Puis, on définit une suite d'ensemble ainsi :

$$X_{n+1} = X_n \cup (X_n \times X_n \times X_n)$$

**Q 3.1 [1 point]** Que valent $X_1$ et $X_2$ ?

On définit maintenant l'ensemble $X$ comme la réunion de tous les $X_n$.

**Q 3.2 [1 point]** L'ensemble $X$ ainsi défini est-il dénombrable ?

On souhaite définir une application taille de $X$ dans $\mathbb{N}$.

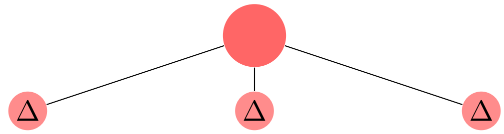
On pose :

— $taille(\Delta) = 0$ et

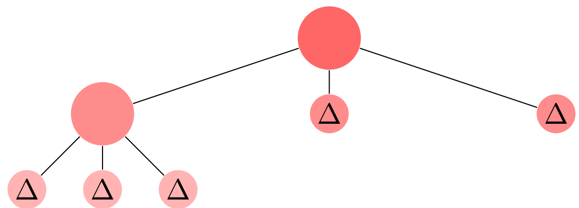
— $taille((A, B, C)) = 1 + taille(A) + taille(B) + taille(C)$

On convient de représenter graphiquement les éléments de $X$ par des arbres ternaires.

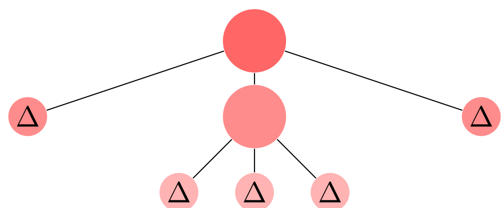

Représentation de Δ.



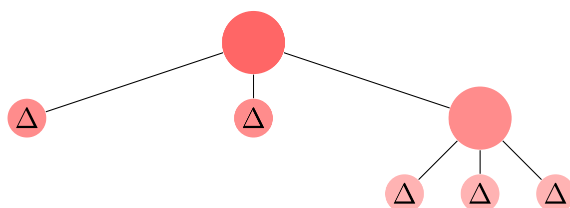
Représentation de $(\Delta, \Delta, \Delta)$.



Représentation de $((\Delta, \Delta, \Delta), \Delta, \Delta)$.



Représentation de $(\Delta, (\Delta, \Delta, \Delta), \Delta)$.



Représentation de $(\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta))$.

**Q 3.3 [1 point]** Calculez les tailles des cinq arbres précédents.
**Q 3.4 [1 point]** Dessinez les éléments de $X$ de taille 3. Combien y en a-t-il ?
On pose $u_n$ le nombre d'éléments de $X$ de taille exactement $n$
**Q 3.5 [1 point]** Sans dessiner les arbres, expliquez comment calculer $u_4$ ?

**Q 3.6 [1 point]** Donnez une relation de récurrence reliant $u_{n+1}$ aux termes précédents de la suite. Cette équation est-elle linéaire ? Possède-t-elle un ordre ?

On considère l'application $f$ de $X$ dans l'ensemble $A^*$ des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Dans $A^*$ on représente le mot vide par $\varepsilon$. f est définie par
— $f(\Delta) = \varepsilon$
— $f((A, B, C)) = aaf(A)bf(B)bf(C)$.
Vous pourrez admettre que $f$ est bien définie sur $X$.
**Q 3.7 [1 point]** Calculez $f((\Delta, \Delta, (\Delta, \Delta, \Delta)))$

**Q 3.8 [1 point]** $aaabbb$ possède-t-il un antécédent par $f$ ?
**Q 3.9 [1 point]** Démontrez par récurrence que

$$\forall x \in X \quad |f(x)| = 4taille(x)$$

.

**Q 3.10 [1 point]** $f$ est-elle injective ?
**Q 3.11 [1 point]** $f$ est-elle surjective ?

**Q 3.12 [1 point]** Prouvez que le nombre d'éléments de $X$ de taille $n$ est inférieur ou égal à $\frac{\binom{4n}{2n}}{2n+1}$.

Fin.