Mathématiques Discrètes

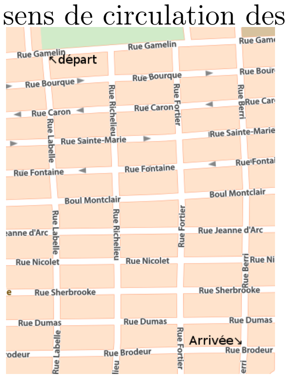
Devoir surveillé n° 1— le 20 octobre 2017

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les exercices sont indépendants. Le barème est sur 21 points. Toute réponse doit être **justifiée**.

Exercice 1 [4 points]

Voici un extrait d'un plan de Ottawa, au Canada. La carte est orientée avec le nord en haut.

Dans cet exercice, on fait l'approximation que toutes les rues sont parallèles ou perpendiculaires entre elles. Cela est presque vrai. Les trajets se font à pieds. On n'est pas soumis aux limitations sur les sens de circulation des voitures.



Q 1.1 [1 point] Expliquez comment coder les itinéraires qui permettent de se rendre du coin des rues Gamelin et Labelle au coin des rues Brodeur et Berri, en ne se déplaçant que vers l'est ou le sud.

Éléments de réponse

On code les itinéraires en utilisant des mots sur l'alphabet à deux symboles $\{E, S\}$. Chaque mot doit comporter exactement 13 symboles, répartit comme suit :

- — dix fois le symbole S
- — trois fois le symbole E

Q 1.2 [1 point] Matthew doit aller du coin des rues Gamelin et Labelle au coin des rues Brodeur et Berri. Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ?

Éléments de réponse

Pour connaître le nombre d'itinéraire que peut emprunter Matthew, il suffit de dénombrer les mots sur l'alphabet $\{E, S\}$ qui comprennent dix fois le symbole S et trois fois le symbole E. Pour fabriquer un tel mot, il suffit de préparer 13 cases vides, puis de choisir la place des E et enfin de remplir les cases vides restantes en utilisant des S. Cela donne donc $\binom{13}{3}$ mots possibles. On peut calculer ce nombre :

$$\binom{13}{3} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 13 \times 2 \times 11 = 286$$

Q 1.3 [2 points] On veut éviter de faire deux déplacements vers l'est consécutifs. Combien reste-t-il de trajets possibles ?

Éléments de réponse

Il y a plusieurs stratégies pour répondre à cette question.

— ou bien
  un itinéraire peut être codé par un mot obtenu en remplaçant dans le mot :

$$.S.S.S.S.S.S.S.S.S.S.$$

  trois des points par un E, les autres points étant effacés. Le nombre d'itinéraires n'ayant pas deux E consécutilfs est donc binomial(11, 3) = 165

— ou bien
  Appelons
  — x_1 le nombre de S précédent le 1erE
  — x_2 le nombre de S entre le 1eret le 2eE
  — x_3 le nombre de S entre le 2eet le 3e
  — x_4 le nombre de S après le 3eE.

  Le nombre d'itinéraires n'ayant pas deux E consécutifs est déterminé par le nombre de solutions en nombre entiers de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

  avec x_1 et $x_4 \geq 0$, et x_2 et $x_3 > 0$. Ce qui donne $\binom{11}{3} = 165$ itinéraires.

— ou bien on compte les trajets qui comportent au moins deux E consécutifs, et on prend le complémentaire. Pour fabriquer un mot comportant au moins deux E consécutifs, on peut procéder ainsi, on fabrique un mot comportant deux E et dix S, et on remplace l'un des E par EE. il y a deux choix possible pour la substitution. toutefois si les deux E du mot étaient déjà cote à cote, cette substitution fabrique deux fois le même mot à trois E consécutifs. Il faut donc retrancher le nombre de mots à trois E consécutifs. On obtient donc le résultat suivant :

$$\binom{13}{3} - \binom{12}{2} \times 2 + \binom{11}{1} = 286 - 132 + 11 = 165$$

— ou bien, on compte directement en distinguant deux sous cas
  — les mots se terminant par E. Dans ce cas alors le caractére qui précède est nécessairement un S. Le mot se fabrique donc en mettant bout à bout des plaques comportants des S et de ES puis en ajoutant un E à la fin. Il faut deux exemplaires de plaques ES et huit exemplaires de plaques comportant exactement un S. Cela donne $\binom{10}{2}$ mots possibles.
  — les mots se terminant par S. Ces mots se fabriquent en mettant bout à bout des plaques comportant des S et de ES. Il faut trois exemplaires de plaques ES et sept exemplaires de plaques comportant exactement un S. Cela donne $\binom{10}{3}$ mots possibles. Les deux ensembles de mots sont disjoints, on peut donc appliquer le principe de la somme. Au total, on trouve donc :

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9}{2} + \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 45 + 120 = 165$$

Exercice 2 [4 points]

Une association d'étudiants souhaite organiser une soirée de jeux de cartes. Les parties se jouent à deux joueurs. Il y aura 32 participants.

Q 2.1 [1 point] Combien de parties seront jouées si chaque participant doit rencontrer chaque autre participant exactement une fois ?

Éléments de réponse

$\binom{32}{2}$

Chaque partie dure en moyenne trente minutes, seize parties peuvent se dérouler simultanément.

Q 2.2 [1 point] Combien de temps sera nécessaire pour réaliser toutes les parties ?

Éléments de réponse

31×30 minutes

Les organisateurs décident d'organiser la soirée autrement. Au lieu de faire s'affronter chaque couple de joueurs, ils décident de faire un tournoi, à élimination directe. Au premier tour, on procéde à un tirage au sort pour former seize couples de joueurs qui vont s'affronter, puis les seize vaincus sont éliminés, les seize vainqueurs, participent au second tour. Un tirage au sort est effectué pour former huit couples de joueurs qui vont s'affronter, puis les huit vaincus sont éliminés, les huit vainqueurs participent au troisième tour ; et on répète le processus jusqu'à la finale.

Q 2.3 [1 point] Combien de parties seront jouées ?

Éléments de réponse

$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$

Q 2.4 [1 point] Combien de temps sera nécessaire pour réaliser toutes les parties ? *Éléments de réponse*

5×30

Exercice 3 [5 points]

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel. On va s'interesser aux nombres de solutions entières naturelles de l'inéquation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq n$$

Voici la fonction `compte_sol_v1`–soigneusement documentée– qui a été réalisée afin d'apporter une réponse au problème. Pour les autres implantations de la fonction pour des raisons d'économies de papier, on ne répetera pas la documentation.

```python
def compte_sol_v1(n):
    """ compute the number of solutions
    of the inequation x_1 + x_2 + x_3 + x_4 <= n
    where x_1, x_2, x_3 and x_4 are nonnegative
    integers
    :param n: (int) the upper bound.
    :return: (int)
    :UC: None
    >>> compte_sol_v1(0)
    1
    >>> compte_sol_v1(1)
    5
    """
    res = 0
    succ_n = n + 1
    for x1 in range(succ_n):
        for x2 in range(succ_n):
            for x3 in range(succ_n):
                for x4 in range(succ_n):
                    if x1 + x2 + x3 + x4 <= n:
                        res += 1
    return res
```

Q 3.1 [1 point] Dans cette implantation, en fonction de n, donnez le nombre d'appels aux opérateurs arithmétiques (les opérateurs `+`,`-`,`*`,`//`). (On ne comptera ni les incrémentations de variables ni les incrémentations d'indices de boucles).

Éléments de réponse

Dans la boucle la plus interne, on utilise 3 fois l'opérateur `+`. pour un triplet (x_1, x_2, x_3) fixé, le corps de la boucle interne sera parcouru $n+1$ fois. donc pour un triplet (x_1, x_2, x_3) fixé, le nombre d'appels à l'opérateur plus est $3(n+1)$.
Pour un couple (x_1, x_2) fixé, le corps de la boucle indicée par x_3 sera effectué $(n+1)$ donc pour un couple (x_1, x_2) fixé le nombre de d'appels à l'opérateur `+` est $3(n+1)^2$.
De la même manière, on obtient pour x_1 fixé, le nombre d'appels à l'opérateur `+` est $3(n+1)^3$ et enfin le nombre total d'appels à l'opérateur `+` est $3(n+1)^4$
On aurait pu l'écrire ainsi :

$$\sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n}\sum_{x_3=0}^{n}\sum_{x_4=0}^{n} 3$$

ce qui redonne aussi $3(n+1)^4$

On suppose disposer d'une implantation de la fonction `binomiale` à deux paramètres n et p, dont la complexité en nombre d'opérations arithmétiques est $2p+1$

Voici une nouvelle implantation de la fonction de comptage :

```python
def compte_sol_v3(n):
    res = 0
    succ_n = n + 1
    for k in range(succ_n):
        res = res + binomiale(3+k,k)
    return res
```

Q 3.2 [1 point] En fonction de l'entier n, combien y a-t-il d'appels aux opérations arithmétiques dans cette implantation ?

Éléments de réponse

`res = 0` ne coute aucune opération arithmétiques. `succ_n = n + 1` est un peu plus délicat, soit on compte 1, soit on compte 0, selon qu'on considère qu'on fait réellement une addition, ou qu'on considère qu'on fait une affectation suivie d'une incrémentation. Le corps de la boucle nécessite, pour un indice k fixé :

— deux additions une pour faire la somme du coefficient binomial avec `res` l'autre pour calculer le premier paramètre effectif de l'appel à la fonction `binomiale`.

— $2k+1$ opérations arithmétiques dû à l'appel `binomial(3+k,k)`

Au total on a donc :

$$\sum_{k=0} n(2k+3) = \frac{(3+(2n+3))\times(n+1)}{2} = (n+3)(n+1)$$

Q 3.3 [1 point] Justifiez mathématiquement cette implantation.

Éléments de réponse

On veut compter le nombre de solution à l'inéquation en variables entières naturelles :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq n$$

Cela revient à compter pour tout k compris entre 0 et n au sens large le nombre de solution en variables entières à l'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

Comme ces ensembles de solutions sont disjoints deux à deux, le nombre total de solution à l'inéquation sera la somme de tous les nombres de solutions calculés pour chaque entier k variant de 0 à n.
Or le nombre de solution à l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$ se calcule en comptant les mots définis sur un alphabet à deux symboles une barre et un signe plus. Il faut trois signes plus et k barres, les mots sont de longueur $k+3$ et il faut choisir k positions pour mettre les barres, le reste est complété par des signes plus.
cela nous donne $\binom{k+3}{k}$ solution à l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$.
En sommant, on obtient

$$\sum_{k=0} n \binom{k+3}{k}$$

c'est justement ce que calcule l'expression `compte_sol_v3(n)`

En remarquant qu'une inéquation peut être transformée en équation en ajoutant une variable d'écart, on constate que le nombre de solutions entières de l'inéquation en variables entières naturelles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq n$$

est le même que le nombre de solutions entières de l'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$$

Q 3.4 [1 point] Déduisez-en une implantation `compte_sol_v4` en deux lignes. (ne pas rappeler la documentation). Puis précisez le nombre d'opérations arithmétiques utilisées.

Éléments de réponse

```
def compte_sol_v4(n):
    return binomiale(n + 4, 4)
```

Un opération arithmétique pour calculer $n + 4$, $2 \times 4 + 1$ pour l'appel à la fonction `binomiale` On utilise 10 opérations arithmétiques (2*4+1)+1

Q 3.5 [1 point] Démontrez la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+3}{k} = \binom{n+4}{n}$$

Éléments de réponse

En utilisant un argument combinatoire, rien à faire, le membre de droite et le membre de gauche compte tous les deux le même ensemble.
Autre méthode :
Par récurrence sur n,

$$\mathcal{H}_n : \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{k+3}{k} = \binom{n+4}{n}$$

pour $n = 0$ on a :

$$\mathcal{H}_0 : \qquad \sum_{k=0}^{0} \binom{k+3}{k} = \binom{4}{0}$$

or $\binom{3}{0} = 1 = \binom{4}{0}$
supposons la relation vraie à l'ordre n. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$\mathcal{H}_{n+1} : \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+3}{k} = \binom{n+5}{n+1}$$

Calculons $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+3}{k}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+3}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+3}{k} + \binom{n+1+3}{n+1} = \binom{n+4}{n} + \binom{n+4}{n+1} = \binom{n+5}{n+1}$$

grace à la relation de récurrence sur les coefficients binomiaux.

Exercice 4 [8 points]

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel fixé.

On cherche à trouver le nombre de solution de l'équation $2r_0 + r_1 = n$ où r_0, r_1 sont des entiers naturels.

Q 4.1 [1 point] Dans quel intervalle d'entiers peut varier r_0 ?, Combien de valeurs possibles pour r_0 ?

Éléments de réponse

D'abord $r_0 \geq 0$ car r_0 est un entier naturel. Ensuite comme $r1$ est aussi un entier naturel $2r_0 \leq 2r_0 + r_1$, et comme $2r_0 + r_1 = n$, on a donc $2r_0 \leq n$. Par conséquent $r_0 \leq \frac{n}{2}$ et comme r_0 est entier $r_0 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. r_0 peut prendre $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ valeurs.

Q 4.2 [1 point] Une fois r_0 fixé, combien peut prendre de valeur r_1 ?

Éléments de réponse

une seule, si r_0 est fixé, alors $r_1 = n - 2r_0$.

Q 4.3 [1 point] Combien de solutions possède l'équation $2r_0 + r_1 = n$?

Éléments de réponse

Il y en a autant que de valeurs possibles pour r_0 c'est-à-dire :

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Q 4.4 [1 point] Donnez le coefficient de degré n dans le développement de $(x+1)^{2n}$.

Éléments de réponse

On applique la formule du binôme :

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0} 2n \binom{2n}{k} x^k \times (1)^{2n-k}$$

le terme de degré n a pour coefficient $\binom{2n}{n}$.

En remarquant que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et en utilisant la formule du multinôme constate que $(x+1)^{2n}$ s'écrit aussi

$$\sum_{\substack{r_0+r_1+r_2=n \\ (r_0,r_1,r_2)\in\mathbb{N}^3}} \binom{n}{r_0, r_1, r_2} x^{2r_0}(2x)^{r_1} 1^{r_2}$$

Q 4.5 [2 points] À l'aide de la relation précédente, donnez une autre expression du terme coefficient en x de degré n.

Éléments de réponse

En transformant l'expression donnée :

$$\sum_{\substack{r_0+r_1+r_2=n \\ (r_0,r_1,r_2)\in\mathbb{N}^3}} \binom{n}{r_0, r_1, r_2} 2^{r_1} x^{2r_0+r_1}$$

Le terme de degré n s'obtient en faisant la somme de tous les termes correspondants au indices r_0, r_1, r_2, tels que $r_0 + r_1 + r_2 = n$ et $2r_0 + r_1 = n$.

$$\sum_{\substack{r_0+r_1+r_2=n \\ 2r_0+r_1=n \\ (r_0,r_1,r_2)\in\mathbb{N}^3}} \binom{n}{r_0, r_1, r_2} 2^{r_1}$$

Biensûr, on peut améliorer notre réponse en la simplifiant un petit peu. Comme$r_0 + r_1 + r_2 = n$ et $2r_0 + r_1 = n$, on peut en déduire que $r_2 = r_0$, et $r_1 = n - 2r_0$. Comme on a vu, précédement que r_0 est un entier tel que $0 \leq r_0 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, Or

$$\binom{n}{r_0, r_1, r2} = \frac{n!}{r_0!(n-2r_0)!r_0!} = \frac{n!(2r_0!)}{(2r_0)!r_0!(n-2r_0)!r_0!} = \frac{n!}{(n-2r_0)!(2r_0)!}\frac{(2r_0)!}{(r_0!)^2} = \binom{n}{2r_0}\binom{2r_0}{r_0}$$

On trouve que le coefficient de degré n est :

$$\sum_{r_0=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{2r_0}{r_0}\binom{n}{2r_0} 2^{n-2r_0}$$

Q 4.6 [2 points] Prouvez la relation suivante :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{r_0=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{2r_0}{r_0}\binom{n}{2r_0} 2^{n-2r_0}$$

Éléments de réponse

Il n'y a plus rien à faire si ce n'est que de conclure qu'on a calculé le coefficient de x^n de deux manières différents, et que les $\left(x^i\right)_{0\leq i\leq 2n}$ forment une base des polynomes en x de degré au plus $2n$. La décomposition sur la base est donc unique et donc le coefficient de x^n est unique. Il y a donc égalité des deux quantités trouvées aux question précédentes. Par conséquent :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{r_0=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{2r_0}{r_0}\binom{n}{2r_0} 2^{n-2r_0}$$