Mathématiques Discrètes

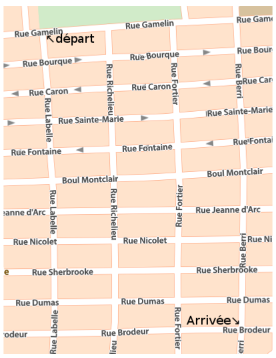
Devoir surveillé n° 1— le 20 octobre 2017

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les exercices sont indépendants. Le barème est sur 21 points. Toute réponse doit être **justifiée**.

Exercice 1 [4 points]

Voici un extrait d'un plan de Ottawa, au Canada. La carte est orientée avec le nord en haut.

Dans cet exercice, on fait l'approximation que toutes les rues sont parallèles ou perpendiculaires entre elles. Cela est presque vrai. Les trajets se font à pieds. On n'est pas soumis aux limitations sur les sens de circulation des voitures.



Q 1.1 [1 point] Expliquez comment coder les itinéraires qui permettent de se rendre du coin des rues Gamelin et Labelle au coin des rues Brodeur et Berri, en ne se déplaçant que vers l'est ou le sud.

Q 1.2 [1 point] Matthew doit aller du coin des rues Gamelin et Labelle au coin des rues Brodeur et Berri. Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ?

Q 1.3 [2 points] On veut éviter de faire deux déplacements vers l'est consécutifs. Combien reste-t-il de trajets possibles ?

Exercice 2 [4 points]

Une association d'étudiants souhaite organiser une soirée de jeux de cartes. Les parties se jouent à deux joueurs. Il y aura 32 participants.

Q 2.1 [1 point] Combien de parties seront jouées si chaque participant doit rencontrer chaque autre participant exactement une fois ?

Chaque partie dure en moyenne trente minutes, seize parties peuvent se dérouler simultanément.

Q 2.2 [1 point] Combien de temps sera nécessaire pour réaliser toutes les parties ?

Les organisateurs décident d'organiser la soirée autrement. Au lieu de faire s'affronter chaque couple de joueurs, ils décident de faire un tournoi, à élimination directe. Au premier tour, on procéde à un tirage au sort pour former seize couples de joueurs qui vont s'affronter, puis les seize vaincus sont éliminés, les seize vainqueurs, participent au second tour. Un tirage au sort est effectué pour former huit couples de joueurs qui vont s'affronter, puis les huit vaincus sont éliminés, les huit vainqueurs participent au troisième tour ; et on répète le processus jusqu'à la finale.

Q 2.3 [1 point] Combien de parties seront jouées ?

Q 2.4 [1 point] Combien de temps sera nécessaire pour réaliser toutes les parties ?

Exercice 3 [5 points]

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel. On va s'interesser aux nombres de solutions entières naturelles de l'inéquation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq n$$

Voici la fonction `compte_sol_v1`–soigneusement documentée– qui a été réalisée afin d'apporter une réponse au problème. Pour les autres implantations de la fonction pour des raisons d'économies de papier, on ne répetera pas la documentation.

```python
def compte_sol_v1(n):
    """ compute the number of solutions
    of the inequation x_1 + x_2 + x_3 + x_4 <= n
    where x_1, x_2, x_3 and x_4 are nonnegative
    integers
    :param n: (int) the upper bound.
    :return: (int)
    :UC: None
    >>> compte_sol_v1(0)
    1
    >>> compte_sol_v1(1)
    5
    """
    res = 0
    succ_n = n + 1
    for x1 in range(succ_n):
        for x2 in range(succ_n):
            for x3 in range(succ_n):
                for x4 in range(succ_n):
                    if x1 + x2 + x3 + x4 <= n:
                        res += 1
    return res
```

Q 3.1 [1 point] Dans cette implantation, en fonction de n, donnez le nombre d'appels aux opérateurs arithmétiques (les opérateurs `+`,`-`,$*$,`//`). (On ne comptera ni les incrémentations de variables ni les incrémentations d'indices de boucles).

On suppose disposer d'une implantation de la fonction `binomiale` à deux paramètres n et p, dont la complexité en nombre d'opérations arithmétiques est $2p + 1$

Voici une nouvelle implantation de la fonction de comptage :

```python
def compte_sol_v3(n):
    res = 0
    succ_n = n + 1
    for k in range(succ_n):
        res = res + binomiale(3+k,k)
    return res
```

Q 3.2 [1 point] En fonction de l'entier n, combien y a-t-il d'appels aux opérations arithmétiques dans cette implantation ?

Q 3.3 [1 point] Justifiez mathématiquement cette implantation.

En remarquant qu'une inéquation peut être transformée en équation en ajoutant une variable d'écart, on constate que le nombre de solutions entières de l'inéquation en variables entières naturelles

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq n$$

est le même que le nombre de solutions entières de l'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$$

Q 3.4 [1 point] Déduisez-en une implantation `compte_sol_v4` en deux lignes. (ne pas rappeler la documentation). Puis précisez le nombre d'opérations arithmétiques utilisées.

Q 3.5 [1 point] Démontrez la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+3}{k} = \binom{n+4}{n}$$

Exercice 4 [8 points]

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel fixé.

On cherche à trouver le nombre de solution de l'équation $2r_0 + r_1 = n$ où r_0, r_1 sont des entiers naturels.

Q 4.1 [1 point] Dans quel intervalle d'entiers peut varier r_0 ?, Combien de valeurs possibles pour r_0 ?

Q 4.2 [1 point] Une fois r_0 fixé, combien peut prendre de valeur r_1 ?

Q 4.3 [1 point] Combien de solutions possède l'équation $2r_0 + r_1 = n$?

Q 4.4 [1 point] Donnez le coefficient de degré n dans le développement de $(x+1)^{2n}$.

En remarquant que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et en utilisant la formule du multinôme constate que $(x+1)^{2n}$ s'écrit aussi

$$\sum_{\substack{r_0+r_1+r_2=n \\ (r_0,r_1,r_2)\in\mathbb{N}^3}} \binom{n}{r_0, r_1, r_2} x^{2r_0}(2x)^{r_1}1^{r_2}$$

Q 4.5 [2 points] À l'aide de la relation précédente, donnez une autre expression du terme coefficient en x de degré n.

Q 4.6 [2 points] Prouvez la relation suivante :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{r_0=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{2r_0}{r_0} \binom{n}{2r_0} 2^{n-2r_0}$$