

Mathématiques Discrètes

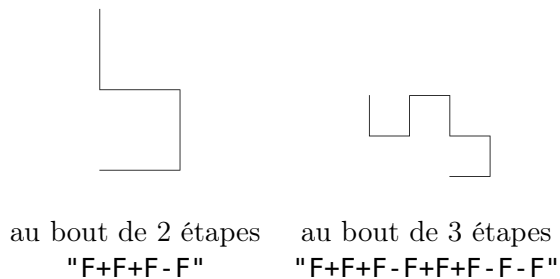
Devoir surveillé n° 3 — le 6 juin 2017

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 5 exercices. Les exercices sont indépendants. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 21 points.

Exercice 1 [2 points]

Q 1.1 [2 points] Soit n un nombre entier naturel non nul. Quel est le nombre minimal d'entiers naturels qu'une partie S de \mathbb{N} doit contenir, afin d'être sûr qu'on puisse trouver deux entiers de S qui ont même reste dans la division par n ?

Exercice 2 [5 points]



Le *dragon de papier* est une courbe fractale obtenue en répétant un procédé de construction assez simple :

- on plie en deux une bande de papier,
- on replie en deux le morceau plié,
- on recommence...
- puis on déplie la bande de papier en ouvrant chaque pli à angle droit.

Au bout de n étapes, la courbe obtenue peut être décrite au moyen d'une chaîne de caractères qui contient uniquement des caractères '-', '+' et 'F'. Les 'F' servent à coder les morceaux de la bande rectiligne, les '+' et les '-' des angles droits ('+' désigne 90 degrés dans le sens trigonométrique et '-' désigne 90 degrés dans le sens antitrigonométrique).

La courbe obtenue à l'étape n peut être codée par un mot m_n défini par récurrence ainsi :

$$\begin{cases} m_0 = 'F' \\ m_{n+1} = m_n \cdot '+' \cdot sym(m_n) \end{cases}$$

où le point désigne la concaténation et où *sym* est la fonction qui renvoie le miroir¹ d'un mot, suivi d'une transformation où

- les plus '+' sont changés en moins '-',
- les moins '-' sont changés en plus '+',
- les 'F' restent inchangés.

Par exemple :

$$sym("FF + F + F -") = "+ F - F - FF"$$

On note :

- g_n le nombre de plus '+' dans le mot m_n ,
- d_n le nombre de moins '-' dans le mot m_n ,

1. C'est-à-dire le mot obtenu en parcourant les lettres à partir de la fin. Par exemple le miroir de "discret" est "tercsid".

- a_n le nombre de 'F' dans le mot m_n et
- l_n la longueur du mot m_n .

- Q 2.1 [1 point]** Donnez les valeurs des termes d'indice 0, 1, 2 pour ces quatre suites.
- Q 2.2 [1 point]** Trouvez une relation de récurrence pour chacune de ces quatre suites.
- Q 2.3 [1 point]** Quel est la nature de la suite (a_n) ?
- Q 2.4 [1 point]** Quel est la nature de la suite (l_n) ?
- Q 2.5 [1 point]** Exprimez directement en fonction de n le terme d'indice n des suites (a_n) et (l_n) .

Exercice 3 [6 points]

- Q 3.1 [1 point]** Combien existe-t-il de triplets d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) tels que :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 ?$$

- Q 3.2 [1 point]** Combien existe-t-il de triplets d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) tels que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \\ x_3 > 2 \end{cases} ?$$

- Q 3.3 [2 points]** Combien existe-t-il de triplets d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) tels que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 4 \\ x_3 \leq 4 \end{cases} ?$$

Francesco possède dix superbes coquillages et une vitrine de présentation à trois niveaux. Il souhaite ranger les coquillages dans la vitrine. Il ne veut pas en mettre plus de 4 par niveau. On s'intéresse au nombre de manières de remplir la vitrine.

- Q 3.4 [2 points]** Combien y a-t-il de manières de remplir la vitrine, en considérant que tous les coquillages sont différents, disposés en ligne sur chacun des niveaux, l'ordre est important ?

Exercice 4 [4 points]

Dans cet exercice n désigne un entier naturel.

- Q 4.1 [4 points]** Comparez le nombre d'éléments des deux ensembles finis suivant :
- l'ensemble des arbres binaires de taille n dont les nœuds sont étiquetés par des booléens,
 - l'ensemble des mots de taille $2n$ sur l'alphabet de quatre symboles $X = \{ (,), [,] \}$ qui sont bien parenthésés. (Tout caractère fermant doit être de la même nature que le caractère ouvrant correspondant).
- Par exemple : $() [] () [([] ())]$ est bien parenthésé, mais ni $()$, ni $] [$, ni $(([]$ ne le sont.

Exercice 5 [4 points]

- Q 5.1 [1 point]** Trouvez le nombre de mots que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet latin, contenant chaque lettre exactement une fois.
- Q 5.2 [3 points]** Parmi ces mots, combien y en a-t-il qui ne contiennent aucun des mots suivants :

- jeux,
- bits,
- mega,
- vies?