Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 2— le 3 janvier 2017

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 3 exercices. Les exercices sont indépendants. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 24 points.

Exercice 1 [5 points]

Abel collectionne des figurines en plomb de personnages fantastiques. Il est susceptible de possèder des trolls, des elfes, des nains, des orcs, des dragons, des gobelins, des humains, et des monstres. Il y a donc 8 catégories de figurines. Il possède une collection de 40 figurines.

Q 1.1 [1 point] Il fait une fiche d'inventaire, en inscrivant sur une feuille de papier, le nombre de figurines de chaque catégorie en respectant l'ordre des catégories donnés dans l'énoncé. Combien peut-il exister de fiche d'inventaire différentes ?

(justifiez la formule, ne chechez pas à calculer le nombre) *Éléments de réponse*

> Il suffit de coder l'inventaire par un mot sur l'alphabet de deux caractères, barre verticale, point. Les barres verticales servent à séparer les catégories. Il faut donc sept barres verticales. Les points servent à indiquer le figurines dans les catégories. Il faut quarante points. Le mot est donc un mot de quarante sept caractères. Chaque mot correspond à une fiche d'inventaire possible. Il y a :
>
> $$\binom{47}{7}$$
>
> mots possibles...

Q 1.2 [1 point] Donnez le plus petit majorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les plus représentées.

Éléments de réponse

> quarante majore le nombre de figurines dans une catégorie. C'est le plus petit majorant car pour fixer les idées, on peut imaginer qu'il ne possède –par exemple– que des trolls, et aucune figurine des autres catégories.

Q 1.3 [1 point] Donnez le plus grand minorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les plus représentées.

Éléments de réponse

> Cinq. Si la catégorie la plus représentée n'avait que 4 éléments comme il y a 8 catégories, il ne pourrait avoir plus de 32 figurines. Si chaque catégories contient 5 figurines, alors elles sont toutes les plus représentées.

Q 1.4 [1 point] Donnez le plus grand minorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les moins représentées.

Éléments de réponse

> Zéro. Pour fixer les idées, on peut imaginer qu'il ne possède –par exemple– aucun troll, et 40 figurines parmi les autres catégories.

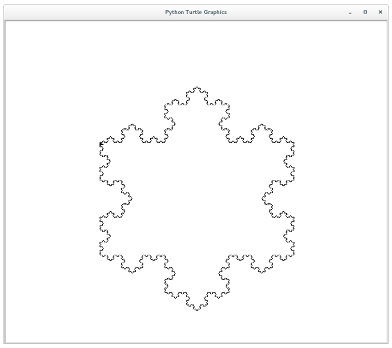
Q 1.5 [1 point] Donnez le plus petit majorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les moins représentées.

Éléments de réponse

évidemment cinq. La catégorie la moins représentée ne peut pas contenir plus de 5 éléments. sinon il aurait le nombre de figurines serait strictement supérieur à quarante. cinq c'est possible. Toutes les catégories seront à la fois la plus représentée et la moins représentée...

Exercice 2 [4 points]

Le flocon de von Koch est une fractale qui peut être obtenue grâce à un *L-système*.



En fait, la courbe est décrite par une chaîne de caractère contenant des F, des plus et des moins. Le F signifie avance d'un pas, le plus et le moins signifie respectivement, tourne à gauche ou tourne à droite d'un angle donné.

Un L-système consiste en une chaîne initiale (appelée axiome), ici

$$s_0 = \text{"}F - -F - -F\text{"}$$

et ici une seule règle de transformation :

$$\text{"}F\text{"} \mapsto \text{"}F + F - -F + F\text{"}$$

C'est-à-dire que pour construire la chaine suivante, on remplace dans la chaîne courante les F par la chaîne "$F + F - -F + F$"

par exemple, à partir de s_0 on obtient s_1 :

$$s_1 = \text{"}F + F - -F + F - -F + F - -F + F - -F + F - -F + F\text{"}$$

On décide de désigner par s_n la chaîne obtenue après n itérations de la règle de transformation.

```
axiome="F--F--F"
regle="F+F--F+F"

def transforme(s,regle):
     res=""
     for c in s:
       if c=="F":
           res += regle
       else:
           res += c
     return res
```

```
s_0=axiome
s_1=transforme(s_0,regle)
s_2=transforme(s_1,regle)
print("s_0="+s_0)
print("s_1="+s_1)
print("s_2="+s_2)
print("len(s_0)=",len(s_0))
print("len(s_1)=",len(s_1))
print("len(s_2)=",len(s_2))
print("nb_oc_F(s_0)=",sum([1 for c in s_0 if c=="F"]))
print("nb_oc_F(s_1)=",sum([1 for c in s_1 if c=="F"]))
print("nb_oc_F(s_2)=",sum([1 for c in s_2 if c=="F"]))
```

dont l'exécution donne le résultat suivant :

```
s_0=F--F--F
s_1=F+F--F+F--F+F--F+F--F+F--F+F
s_2=F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F
len(s_0)= 7
len(s_1)= 28
len(s_2)= 112
nb_oc_F(s_0)= 3
nb_oc_F(s_1)= 12
nb_oc_F(s_2)= 48
```

Les questions qui suivent vont permettre d'apporter des réponses à deux problèmes.

– Quelle est la longueur de la chaîne à l'étape n ? (C'est-à-dire le nombre de caractères de s_n). On appelle t_n ce nombre.
– Quelle est la longueur de la courbe dessinée à l'étape n ?(C'est-à-dire le nombre d'occurences du caractère F dans s_n). On appelle d_n ce nombre.

Q 2.1 [1 point] Lisez avec attention le code précédent et les résultats obtenus lors de l'exécution du code. En déduire t_0, t_1, t_2, d_0, d_1, d_2.

Éléments de réponse

$t_0 = 7$, $t_1 = 28$, $t_2 = 112$, $d_0 = 3$, $d_1 = 12$, $d_2 = 48$

Q 2.2 [1 point] Donnez une relation de récurrence reliant d_{n+1} à d_n. Quelle est la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Exprimez d_n directement en fonction de n.

Éléments de réponse

Il s'agit d'une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 3.
On a reconnu une suite géométrique. Or on sait que le terme général d'une suite géométrique est : (premier terme) $\times$ raison^n.

$$d_n = 3 \times 4^n$$

Q 2.3 [1 point] Donnez une relation de récurrence reliant t_{n+1} à t_n et d_n, puis montrer que :

$$t_{n+1} = t_n + 21 \times 4^n$$

Éléments de réponse

il y a $(t_n - d_n)$ caractères qui proviennent des $+$ et des - présents à l'étape n. L'application de la règle transforme les F en chaînes de 8 caractères. Il y aura donc $d_n \times 8$ caractères qui proviennent de la transformation des F

$$t_{n+1} = (t_n - d_n) + d_n \times 8$$

$$t_{n+1} = t_n + d_n \times 7$$

Ensuite, il suffit de remplacer dans la relation trouvée à la question précédente, d_n par son expression en fonction de n.

$$t_{n+1} = t_n + 3 \times 4^n \times 7$$

$$t_{n+1} = t_n + 21 \times 4^n$$

Q 2.4 [1 point] Donnez une expression de t_n directement en fonction de n

Éléments de réponse

C'est une équation de récurrence du 1er ordre à coefficients constant non homogène. On cherche la solution générale de l'équation homogène associée. L'équation caractéristique est :

$$r - 1 = 0$$

on en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée est constante k_1. On cherche une solution particulière. Comme la partie non homogène est une suite géométrique de raison 4 et que 4 n'est pas racine de l'équation caractèristique, on cherche la solution particulière sous la forme $k_2 4^n$. en remplaçant dans la relation de récurrence, on obtient :

$$k_2 \times 4^{n+1} = k_2 \times 4^n + 21 \times 4^n$$

on divise par 4^n qui est non nul et on obtient

$$4k_2 - k_2 = 21$$

$$k_2 = 7$$

donc la solution est

$$t_n = 7 \times 4^n + k_1$$

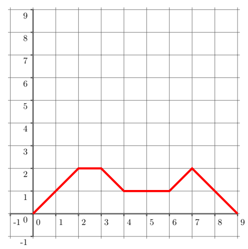
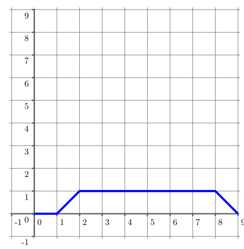
or $t_0 = 7$ donc $k_1 = 0$ et $t_n = 7 \times 4^n$

Exercice 3 [15 points]

On s'interesse aux chemins tracés depuis l'origine, qui restent dans le demi plan formé par les points d'ordonnée positive —c'est-à-dire que le chemin ne passe pas sous l'axe des abscisses— et qui se terminent au point de coordonnées $(n, 0)$. Les seuls déplacements autorisés sont :

- un pas en suivant le vecteur $(1, 1)$,
- ou bien un pas en suivant le vecteur $(1, 0)$
- ou bien un pas en suivant le vecteur $(1, -1)$

Voici deux exemples de tels chemins :

Q 3.1 [1 point] Proposez une manière de coder ces chemins en utilisant des mots sur un alphabet que vous préciserez. Vous préciserez quelle propriété doivent vérifier ces mots.

Éléments de réponse

On peut utiliser des mots sur l'alphabet $X = \{U, F, D\}$
- où U (comme *up*) sert à coder un pas suivant le vecteur $(1, 1)$,
- où F (comme *forward*) sert à coder un pas en suivant le vecteur $(1, 0)$
- et où D(comme *down*) sert à coder un pas en suivant le vecteur $(1, 0)$.

Il faut que le mot soit de longueur n, que dans tout préfixe du mot le le nombre de U doit être supérieur ou égal au nombre de D pour assurer que le chemin reste au dessus de l'axe des abscisses et que dans le mot complet le nombre de U soit égal au nombre de D pour assurer que le chemin se termine au point de coordonnées $(n, 0)$

On note X l'alphabet de trois caractères, constitué d'une parenthèse ouvrante, d'une parenthèse fermante, et d'un point.

On appelle mots de Motzkin les mots u définis sur l'alphabet X tels que :
- u contient autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes
- dans tout préfixe de u le nombre de parenthèses ouvrantes est supérieur ou égal au nombre de parenthèses fermantes.

On note $\mathfrak{M}$ l'ensemble de ces mots et $\mathfrak{M}_n$ la partie de $\mathfrak{M}$ constituée des mots de longueur n.

Q 3.2 [1 point] Donnez les valeurs de $\mathfrak{M}_i$ pour i allant de 0 à 3.

Éléments de réponse

- $\mathfrak{M}_0 = \{\epsilon\}$
- $\mathfrak{M}_1 = \{.\}$
- $\mathfrak{M}_2 = \{.., ()\}$
- $\mathfrak{M}_3 = \{..., .(), (.), ().\}$

On définit une application f de l'ensemble $\mathfrak{M}$ dans l'ensemble des mots de Dyck, à chaque mot u de Motzkin, on associe le mot $f(u)$ obtenu en supprimant les points.

Q 3.3 [1 point] L'application f est-elle injective ?

Éléments de réponse

Clairement non, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire deux mots de Motzkin dont l'image est le même mot de Dyck. Par exemple $u = .()$ et $v = (.)$ sont deux mots de Motzkin or $f(u) = f(v) = ()$

Q 3.4 [1 point] L'application f est-elle surjective ? *Éléments de réponse*

Oui, soit m est un mot de Dyck quelconque. alors m concaténé avec un point est un mot de Motzkin dont l'image par f est justement m

Q 3.5 [1 point] Si u est un mot de Motzkin de longueur n, alors que pouvez-vous dire du nombre de parenthèses ouvrantes de $f(u)$?

Éléments de réponse

Soit u un mot de longueur n alors $n_((u) + n_)(u) + n_.(u) = n$ où $n_?(u)$ désigne le nombre d'occurence de ? dans u
d'autre part comme u est de Motzkin le nombre de parenthèses ouvrantes est égal au nombre de parenthèse fermante donc $n_((u) = n_)(u)$ On en déduit : $2n_((u) \leq n$ et donc $n_((u) \leq \frac{n}{2}$. comme $n_((u)$ est un entier on peut affirmer que le nombre de parenthèses ouvrantes de u est inférieur ou égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathfrak{M}$ des mots de Motzkin par $u\mathcal{R}v$ si par définition :

$$f(u) = f(v)$$

Q 3.6 [1 point] Que pouvez vous dire de la relation $\mathcal{R}$?

Éléments de réponse

- $\mathcal{R}$ est évidemment reflexive. car si u est un mot de Motzkin quelconque, alors $f(u) = f(u)$ donc $u\mathcal{R}u$. Et ceci est vrai pour tout mot u mot de Motzkin.
- $\mathcal{R}$ est évidemment symétrique. car si u et v sont deux mots de Motzkin quelconques, si $u\mathcal{R}v$ alors $f(u) = f(v)$ donc $f(v) = f(u)$ et par conséquent $v\mathcal{R}u$. Et ceci est vrai pour tout coupe (u, v) de mots de Motzkin.
- $\mathcal{R}$ est transitive. car si u,v et w sont trois mots de Motzkin quelconques, si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}w$ alors $f(u) = f(v)$ et $f(v) = f(w)$, par transitivité de l'égalité, on en déduit $f(u) = f(w)$, et par conséquent $u\mathcal{R}w$,
- $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique. Il suffit d'exhiber un contre-exemple. $..\mathcal{R}\epsilon$ car $f(..) = f(\epsilon) = \epsilon$ et $\epsilon\mathcal{R}..$ par symétrie démontrée précédemment, pourtant $.. \neq \epsilon$

Q 3.7 [1 point] Soit y un mot de Dyck, le mot y est-il un mot de Motzkin ? *Éléments de réponse*

Biensur, il suffit simplement que rappeler qu'un mot de Dyck à les mêmes contrainte au niveau des parenthèses que les mots de Motzkin. Tout mot de motzkin sans point est un mot de Dyck. Tout mot de Dyck peut être vu comme un mot de Motzkin, pour lequel on n'a pas utilisé de point. Le concepteur du sujet aurait dû poser cette question bien avant.

On s'interesse à la classe d'équivalence $c(y)$ pour la relation $\mathcal{R}$

Q 3.8 [1 point] $c(y)$ est il un ensemble fini ?

Éléments de réponse

Biensur que non, il suffit de remarque que si m appartient à $c(y)$ alors $.m$ est aussi dans $c(y)$ ce qui permet de construire une suite infinie de mots de Motzkin y, $.y$, $..y$, $...y$, ... dont l'image par f sont toujours $f(y)$

Q 3.9 [1 point] Démontrez que l'ensemble des mots de Dyck est un système complet de représentants pour la relation $\mathcal{R}$

Éléments de réponse

Il s'agit de montrer que pour tout u mot de Motzkin, il existe un unique mot y de Dyck tel que $u\mathcal{R}y$.
Montrons dans un premier temps l'existence : $f(u)$ est un mot de Dyck, donc un Mot de Motzkin sans point. Il est facile de voir que $f(f(u)) = f(u)$, car une fois qu'on a retiré tous les points, il n'y en a plus ! $u\mathcal{R}f(u)$. On a donc trouvé un mot de Dyck qui est en relation avec u.
Montrons qu'il est unique. si y et z sont deux mots de Dyck en relation avec u alors par transitivité de la relation $\mathcal{R}$, on a $y\mathcal{R}z$ puis par conséquent $f(y) = f(z)$ mais comme y n'a pas de points et z non plus on a $f(z) = z$ et $f(y) = y$ par transitivité de l'égalité on trouve donc $y = z$

Dans la suite, n est un entier naturel, k est un entier naturel et inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
On note y un mot de Dyck de longueur $2k$. Par conséquent, y contient k parenthèses ouvrantes.
On s'interesse à l'intersection de $c(y)$ avec $\mathfrak{M}_n$.

Q 3.10 [2 points] Cet ensemble peut-il être vide ? Est-il fini ? Si c'est le cas, combien y a-t-il d'éléments dans cet ensemble ? Sinon, exhibez une suite infinie d'éléments distincts.

Éléments de réponse

- non, cet ensemble ne peut pas être vide car le mot u obtenu en concaténant avec y un mot formé de $n - 2k$ points est un mot de Motzkin de longueur n tel que $u\mathcal{R}y$
- évidemment le nombre de mot de Motzkin de longueur n est fini, $c(y) \cap \mathfrak{M}_n$ est inclus dans l'ensemble des mots de Motzkin de longueur n. Il ne peut être que fini.
- Le nombre d'éléments de $c(y) \cap \mathfrak{M}_n$ est facile à déterminer, il suffit de compter le nombre de manière de rajouter $n - 2k$ points. On prépare n cases qu'on remplit de $(n - 2k)$ points, les $2k$ cases qui restent servent à écrire y. Il y a donc dans l'ensemble $\mathfrak{M}_n$ exactement $\binom{n}{2k}$ éléments de $c(y)$.

Q 3.11 [2 points] Montrez que $\mathfrak{M}_n$ est la réunion disjointe de tous les $c(y) \cap \mathfrak{M}_n$ où y décrit l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2k$ avec $2k \leq n$. En déduire que le nombre m_n de mots de Motzkin de longueur n s'exprime sous forme d'une somme indicée par k faisant intervenir des nombres de Catalan et des coefficients binomiaux.

Éléments de réponse

Cela provient directement du fait que les mots de dyck forment un système complet de représentants.

$$\mathfrak{M}_n = \cup_{y \in \mathfrak{D}} c(y) \cap \mathfrak{M}_n$$

en remarquant que si y est trop long (c'est à dire plus long que n) alors $c(y) \cap \mathfrak{M}_n$ est vide.

$$\mathfrak{M}_n = \cup_{y \in \mathfrak{D}} c(y) \cap \mathfrak{M}_n$$

On peut raffiner en décomposant l'ensemble des mots de Dyck de longueur au plus n en réunion disjointe des mots de Dyck de longueur $2k$ pour k allant de 0 à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

$$\mathfrak{M}_n = \cup_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \cup_{y \in \mathfrak{D}, |y|=2k} c(y) \cap \mathfrak{M}_n$$

En passant au cardinaux.

$$m_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sum_{y \in \mathfrak{D}, |y|=2k} card\left(c(y) \cap \mathfrak{M}_n\right)$$

En utilisant le résultat de la question précédente :

$$m_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sum_{y \in \mathfrak{D}, |y|=2k} \binom{n}{2k}$$

On factorise,

$$m_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} \sum_{y \in \mathfrak{D}, |y|=2k} 1$$

On reconnait le cardinal des mots de Dyck de longueur $2k$:

$$m_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} card\left(\{y \in \mathfrak{D}, |y| = 2k\}\right)$$

On remplace :

$$m_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1}$$

Q 3.12 [2 points] En remarquant qu'un mot de Motzkin commence nécessairement par un point ou bien par une parenthèse ouvrante, donnez une équation de récurrence reliant le nombre m_{n+1} de mots de Motzkin de longueur $n+1$ aux termes précédents de la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Éléments de réponse*

$$m_{n+1} = m_n + \sum_{k=0}^{n} m_k m_{n-k}$$