Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 2— le 3 janvier 2017

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 3 exercices. Les exercices sont indépendants. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 24 points.

Exercice 1 [5 points]

Abel collectionne des figurines en plomb de personnages fantastiques. Il est susceptible de possèder des trolls, des elfes, des nains, des orcs, des dragons, des gobelins, des humains, et des monstres. Il y a donc 8 catégories de figurines. Il possède une collection de 40 figurines.

Q 1.1 [1 point] Il fait une fiche d'inventaire, en inscrivant sur une feuille de papier, le nombre de figurines de chaque catégorie en respectant l'ordre des catégories donnés dans l'énoncé. Combien peut-il exister de fiche d'inventaire différentes ?

(justifiez la formule, ne chechez pas à calculer le nombre)

Q 1.2 [1 point] Donnez le plus petit majorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les plus représentées.

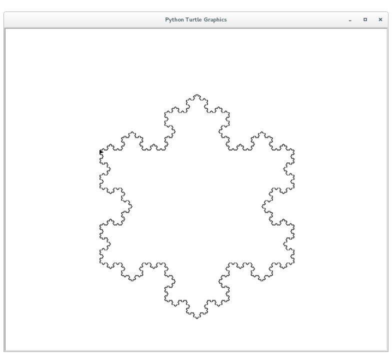
Q 1.3 [1 point] Donnez le plus grand minorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les plus représentées.

Q 1.4 [1 point] Donnez le plus grand minorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les moins représentées.

Q 1.5 [1 point] Donnez le plus petit majorant possible du nombre de figurines d'une des catégories les moins représentées.

Exercice 2 [4 points]

Le flocon de von Koch est une fractale qui peut être obtenue grâce à un *L-système*.



En fait, la courbe est décrite par une chaîne de caractère contenant des F, des plus et des moins. Le F signifie avance d'un pas, le plus et le moins signifie respectivement, tourne à gauche ou tourne à droite d'un angle donné.

Un L-système consiste en une chaîne initiale (appelée axiome), ici

$$s_0 = "F - -F - -F"$$

et ici une seule règle de transformation :

$$"F" \mapsto "F + F - -F + F"$$

C'est-à-dire que pour construire la chaine suivante, on remplace dans la chaîne courante les F par la chaîne $"F + F - -F + F"$

par exemple, à partir de s_0 on obtient s_1 :

$$s_1 = "F + F - -F + F - -F + F - -F + F - -F + F - -F + F"$$

On décide de désigner par s_n la chaîne obtenue après n itérations de la règle de transformation.

```python
axiome="F--F--F"
regle="F+F--F+F"

def transforme(s,regle):
     res=""
     for c in s:
       if c=="F":
           res += regle
       else:
           res += c
     return res
```

```python
s_0=axiome
s_1=transforme(s_0,regle)
s_2=transforme(s_1,regle)
print("s_0="+s_0)
print("s_1="+s_1)
print("s_2="+s_2)
print("len(s_0)=",len(s_0))
print("len(s_1)=",len(s_1))
print("len(s_2)=",len(s_2))
print("nb_oc_F(s_0)=",sum([1 for c in s_0 if c=="F"]))
print("nb_oc_F(s_1)=",sum([1 for c in s_1 if c=="F"]))
print("nb_oc_F(s_2)=",sum([1 for c in s_2 if c=="F"]))
```

dont l'exécution donne le résultat suivant :

```
s_0=F--F--F
s_1=F+F--F+F--F+F--F+F--F+F--F+F
s_2=F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F
len(s_0)= 7
len(s_1)= 28
len(s_2)= 112
nb_oc_F(s_0)= 3
nb_oc_F(s_1)= 12
nb_oc_F(s_2)= 48
```

Les questions qui suivent vont permettre d'apporter des réponses à deux problèmes.

– Quelle est la longueur de la chaîne à l'étape n ? (C'est-à-dire le nombre de caractères de s_n). On appelle t_n ce nombre.
– Quelle est la longueur de la courbe dessinée à l'étape n ?(C'est-à-dire le nombre d'occurences du caractère F dans s_n). On appelle d_n ce nombre.

Q 2.1 [1 point] Lisez avec attention le code précédent et les résultats obtenus lors de l'exécution du code. En déduire t_0, t_1, t_2, d_0, d_1, d_2.

Q 2.2 [1 point] Donnez une relation de récurrence reliant d_{n+1} à d_n. Quelle est la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Exprimez d_n directement en fonction de n.

Q 2.3 [1 point] Donnez une relation de récurrence reliant t_{n+1} à t_n et d_n, puis montrer que :

$$t_{n+1} = t_n + 21 \times 4^n$$

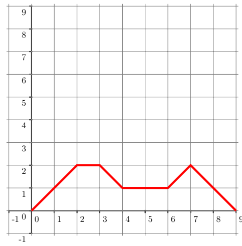
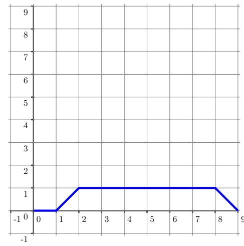
Q 2.4 [1 point] Donnez une expression de t_n directement en fonction de n

Exercice 3 [15 points]

On s'interesse aux chemins tracés depuis l'origine, qui restent dans le demi plan formé par les points d'ordonnée positive —c'est-à-dire que le chemin ne passe pas sous l'axe des abscisses— et qui se terminent au point de coordonnées (n,0). Les seuls déplacements autorisés sont :

– un pas en suivant le vecteur $(1, 1)$,
– ou bien un pas en suivant le vecteur $(1, 0)$
– ou bien un pas en suivant le vecteur $(1, -1)$

Voici deux exemples de tels chemins :

Q 3.1 [1 point] Proposez une manière de coder ces chemins en utilisant des mots sur un alphabet que vous préciserez. Vous préciserez quelle propriété doivent vérifier ces mots.

On note X l'alphabet de trois caractères, constitué d'une parenthèse ouvrante, d'une parenthèse fermante, et d'un point.

On appelle mots de Motzkin les mots u définis sur l'alphabet X tels que :

- u contient autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes
- dans tout préfixe de u le nombre de parenthèses ouvrantes est supérieur ou égal au nombre de parenthèses fermantes.

On note $\mathfrak{M}$ l'ensemble de ces mots et $\mathfrak{M}_n$ la partie de $\mathfrak{M}$ constituée des mots de longueur n.

Q 3.2 [1 point] Donnez les valeurs de $\mathfrak{M}_i$ pour i allant de 0 à 3.

On définit une application f de l'ensemble $\mathfrak{M}$ dans l'ensemble des mots de Dyck, à chaque mot u de Motzkin, on associe le mot $f(u)$ obtenu en supprimant les points.

Q 3.3 [1 point] L'application f est-elle injective ?

Q 3.4 [1 point] L'application f est-elle surjective ?

Q 3.5 [1 point] Si u est un mot de Motzkin de longueur n, alors que pouvez-vous dire du nombre de parenthèses ouvrantes de $f(u)$?

On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathfrak{M}$ des mots de Motzkin par $u\mathcal{R}v$ si par définition :

$$f(u) = f(v)$$

Q 3.6 [1 point] Que pouvez vous dire de la relation $\mathcal{R}$?

Q 3.7 [1 point] Soit y un mot de Dyck, le mot y est-il un mot de Motzkin ?

On s'interesse à la classe d'équivalence $c(y)$ pour la relation $\mathcal{R}$

Q 3.8 [1 point] $c(y)$ est il un ensemble fini ?

Q 3.9 [1 point] Démontrez que l'ensemble des mots de Dyck est un système complet de représentants pour la relation $\mathcal{R}$

Dans la suite, n est un entier naturel, k est un entier naturel et inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

On note y un mot de Dyck de longueur $2k$. Par conséquent, y contient k parenthèses ouvrantes.

On s'interesse à l'intersection de $c(y)$ avec $\mathfrak{M}_n$.

Q 3.10 [2 points] Cet ensemble peut-il être vide ? Est-il fini ? Si c'est le cas, combien y a-t-il d'éléments dans cet ensemble ? Sinon, exhibez une suite infinie d'éléments distincts.

Q 3.11 [2 points] Montrez que $\mathfrak{M}_n$ est la réunion disjointe de tous les $c(y) \cap \mathfrak{M}_n$ où y décrit l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2k$ avec $2k \leq n$. En déduire que le nombre m_n de mots de Motzkin de longueur n s'exprime sous forme d'une somme indicée par k faisant intervenir des nombres de Catalan et des coefficients binomiaux.

Q 3.12 [2 points] En remarquant qu'un mot de Motzkin commence nécessairement par un point ou bien par une parenthèse ouvrante, donnez une équation de récurrence reliant le nombre m_{n+1} de mots de Motzkin de longueur $n+1$ aux termes précédents de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$