Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 1— le 21 octobre 2016

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les exercices sont indépendants. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 24 points.

Exercice 1 [3 points]

Le professeur de Maths-discrètes vient à l'université à bicylette. Il dispose d'un antivol à code de 4 chiffres de 0 à 9 pour attacher son vélo.

Q 1.1 [1 point] Combien de codes sont possibles ?

Éléments de réponse

Il y a 10 choix pour chaque chiffre du code, en appliquant le principe du produit, on obtient $10^4 = 10000$ codes possibles.

Toutefois beaucoup de gens utilisent le quantième (numéro du jour dans le mois) et le numéro de mois de l'anniversaire d'un proche. (Les deux nombres sont écrits sur deux chiffres avec des zéros non significatifs si nécessaire)

Q 1.2 [1 point] À une unité près, combien y a-t-il de tels codes ?

Éléments de réponse

366 à cause des années bissextiles. On peut tous avoir un proche né le 29 février d'une année bissextile. (merci Sophie !)

Le professeur a bien choisi aléatoirement son code dans l'ensemble des codes possibles, toutefois il laisse échapper l'information suivante :

« tous les chiffres du code sont différents ».

Q 1.3 [1 point] Combien y a-t-il de codes possibles ?

Éléments de réponse

$$A_{10}^4$$

Exercice 2 [6 points]

Lors d'une soirée, l'ensemble des convives est constitué par n couples. Il y a donc $2n$ personnes présentes. À l'arrivée, est remis à l'un des membres du couple un bracelet fluorescent jaune et à l'autre membre un bracelet fluorescent vert.

Soit k un entier fixé compris entre 0 et n.

Q 2.1 [1 point] Combien y a-t-il de manières de choisir un groupe de k personnes avec un bracelet fluorescent jaune ?

Éléments de réponse

Il y a n personnes qui possèdent un bracelet fluorescent jaune. On choisit k personnes parmi ces n personnes, il y a donc $\binom{n}{k}$ choix possibles.

Q 2.2 [1 point] Combien y a-t-il de manières de choisir un groupe de n personnes dont exactement k possède un bracelet fluorescent jaune, et par conséquent $n - k$ un bracelet fluorescent vert. Dans la suite on note ce nombre $g_{n,k}$.

Éléments de réponse

Il y a n personnes qui possèdent un bracelet fluorescent jaune. On choisit k personnes parmi ces n personnes, il y a donc $\binom{n}{k}$ choix possibles. puis on complète le groupe en choisissant $n-k$ personnes dans le groupe des personnes qui ont reçu un bracelet fluorescent vert. Il y a donc $\binom{n}{n-k}$ choix possibles. Grâce à la règle du produit, le nombre de choix possibles d'un groupe de n personnes dont exactement k possède un bracelet fluorescent jaune est $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$. Or $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ donc le nombre est $\binom{n}{k}^2$

Q 2.3 [2 points] En utilisant la règle de la somme, donnez une expression faisant intervenir $g_{n,k}$ qui compte le nombre de manière de choisir n personnes dans cette assemblée de $2n$ personnes.

Éléments de réponse

Les groupes de n personnes peuvent être compter en les regroupant en fonction du nombre k de détenteurs de bracelet fluorescent jaune. Donc le nombre de manière de choisir un groupe de n personnes parmi cette assemblée de $2n$ personnes est :

$$\sum_{k=0}^{k=n} g_{n,k} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2$$

Q 2.4 [2 points] Démontrer la relation suivante :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2.$$

Éléments de réponse

Le nombre de manière de choisir n personnes parmi $2n$ est donné par $\binom{2n}{n}$, mais d'après la question précédente c'est aussi la $\sum_{k=0}^{k=n} g_{n,k} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2$

Exercice 3 [5 points]

Cet exercice comporte 5 questions, chaque question est notée sur un point. Il y a cinq niveaux de réussite à chaque question : le niveau A correspond à la réussite complète à la question et on attribue 1 point, le niveau B correspond à une réponse partielle pour laquelle on attribue 0,75 point, le niveau C correspond à une réponse pour laquelle on attribue 0,5 point, le niveau D correspond à une réponse qui apporte 0,25 point et le niveau E est une réponse qui n'apporte aucun point.

Q 3.1 [1 point] Combien y a-t-il de mots sur l'alphabet $\{A, B, C, D, E\}$ qui décrivent la réussite à cet exercice ?

Éléments de réponse

L'ensemble des mots de 5 lettres formés sur l'alphabet $\{A, B, C, D, E\}$ est décrit par $\{A, B, C, D, E\}^5$. Le cardinal de cet ensemble est $card\left(\{A, B, C, D, E\}\right)^5 = 5^5$

Q 3.2 [1 point] En remarquant que chaque question est notée en un nombre entier de quarts de point, donnez une équation dont les inconnues sont entières, et qui caractérise les réponses à l'exercice donnant la note $2,75$. On précisera bien les contraintes à imposer aux variables.

Éléments de réponse

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 2.75$$

avec y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 des notes comprises entre 0 et 1 en quart de point. On multiplie par 4 les deux membres de l'équation. Puis, pour tout i, on pose $x_i = 4y_i$. Ainsi, x_i est un entier compris entre 0 et 4 et

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

Q 3.3 [1 point] Compter le nombre de solutions à l'équation suivante :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

où les x_i sont des entiers naturels pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 5$.

Éléments de réponse

On compte les mots composés de onze barres, et de quatre plus $(5-1)$, il y en a $\binom{15}{4}$. Ces mots ont quinze caractères.

$$\binom{15}{4} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{24} = 15 \times 7 \times 13 = 1365$$

Q 3.4 [1 point] Compter le nombre de solutions à l'équation suivante :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

où les entiers x_i vérifient pour tout indice i tel que $1 \leq i \leq 5$ la condition $0 \leq x_i \leq 4$.

Éléments de réponse

On va appliquer le principe d'inclusion-exclusion.

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{N}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11\right\}$$

On définit pour chaque entier $i \in [\![1, 5]\!]$, le

$$A_i = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{N}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 x_i \geq 5\right\}$$

On a

$$\begin{aligned}
&card\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5}\right) = \\
&card\,(U) \\
&- card\,(A_1) - card\,(A_2) - ... - card\,(A_5) \\
&+ card\,(A_1 \cap A_2) + card\,(A_1 \cap A_3) + ... + card\,(A_4 \cap A_5) \\
&- card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_4) - ... - card\,(A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&+ card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) + card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) + ... + card\,(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&- card\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)
\end{aligned}$$

compter le nombre d'éléments de l'ensemble A_1, revient à compter le nombre de solutions à l'équation :

$$5 + y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

C'est-à-dire :

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

Or c'est aussi le nombre de mots de dix caractères composés de six barres et de quatre plus. C'est

$$\binom{10}{4} = 10 * 9 * 8 * 7 = 210$$

Par symétrie, les autres A_i ont même cardinal. On s'interresse maintenant à l'intersection de A_1 et de A_2. Cela revient à compter le nombre de solutions de l'équation

$$5 + y_1 + 5 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

C'est-à-dire :

$$y_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

Or c'est aussi le nombre de mots de cinq caractères composés de une barre et de quatre plus. C'est

$$\binom{5}{4} = 5$$

Les autres intersections de deux A_i distincts ont même cardinal.
On remarque que les intersections de trois, quatre, cinq éléments distincts sont vides. Par conséquent :

$$card\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5}\right) = 1365 - 5 \times 210 + \binom{5}{2} \times 5 = 1365 - 1050 + 50 = 365$$

Q 3.5 [1 point] Combien y a-t-il de mots de 5 lettres sur l'alphabet $\{A, B, C, D, E\}$ dont l'interprétation donne une note de $2,75$? Proposez du code Python permettant de vérifier le résultat.

Éléments de réponse

C'est exactement ce qu'on a compté à la question précédente : 365.

```
def valeur(x):
    """
    >>> valeur("A")
    1.0
    """
    assert type(x)==str and len(x)==1 and  "A"<=x<="E"
    return float(4-ord(x)+ord('A'))/4

def valeur_mot(mot):
    r=0.0
    for x in mot:
        r+=valeur(x)
    return r

def enum_mot_longueur(alphabet,longueur):
    if longueur==0:
        return [""]
    else:
        prec=enum_mot_longueur(alphabet,longueur-1)
        r=[]
        for i in alphabet:
            for j in prec:
                r.append(i+j)
        return r

liste=enum_mot_longueur("ABCDE",5)
cpt=0
for x in liste:
    if valeur_mot(x)==2.75:
        cpt+=1

print(cpt)
```

Exercice 4 [10 points]

Q 4.1 [1 point] Combien y a-t-il de multiples de 2 dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$? Combien y a-t-il de multiples de 4 dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$?

Éléments de réponse

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$
$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

Q 4.2 [1 point] Combien y a-t-il de multiples de 2 dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas des multiples de 4 ?

Éléments de réponse

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

On désigne par k un entier naturel.

Q 4.3 [1 point] Plus généralement, combien y a-t-il de multiples de 2^k dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas des multiples de 2^{k+1} ?

Éléments de réponse

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor$$

Q 4.4 [2 points] Expliquez pourquoi l'exposant de 2 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $n!$ est :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor \right)$$

Éléments de réponse

soit k un entier compris entre 1 et n. il existe i et l tels que $k = 2^i \times l$ avec l impair (non divisible par 2). Le nombre k va contribuer à ajouter i à l'exposant de 2 dans la décomposition en produit de facteur premier de $n!$. On peut répartir les nombres de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ en différent ensembles :

— les nombres impairs, ces nombres ne contribuent pas à augmenter l'exposant,
— les multiples de 2 qui ne sont pas des multiples de 4, ces nombres contribuent à augmenter l'exposant de 1,
— les multiples de 4 qui ne sont pas des multiples de 8, ces nombres contribuent à augmenter l'exposant de 2,
— ...
— les multiples de 2^i qui ne sont pas des multiples de 2^{i+1},ces nombres contribuent à augmenter l'exposant de i,
— ...

On s'arrête dès que 2^i dépasse n. c'est à dire $i > \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

Q 4.5 [2 points] Démontrer que l'expression précédente vaut aussi :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$$

Éléments de réponse

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \right) - \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} i \left\lfloor \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \right) - \left(\sum_{j=2}^{\lfloor 1+\log_2(n) \rfloor} (j-1) \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor \right) \\
&= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\sum_{i=2}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \right) - \left(\sum_{j=2}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (j-1) \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor \right) + 0 \\
&= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\sum_{i=2}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (i-(i-1)) \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \right)
\end{aligned}$$

Q 4.6 [1 point] Généralisez le raisonnement précédent afin de connaitre l'exposant de 5 dans la décomposition en produit de facteur premier de $n!$.

Éléments de réponse

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_5(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor$$

Q 4.7 [2 points] Dans l'écriture décimale de 2016! , combien y a-t-il de zéros à la fin ? (On rappelle quelques puissances de cinq : $5^2 = 25 \qquad 5^3 = 125 \qquad 5^4 = 625 \qquad 5^5 = 3125$)

Éléments de réponse

Comme $10 = 5 \times 2$, on s'interresse à l'exposant de 2 et celui de 5 dans la décomposition en produit de facteur premier de 2016!. On calcule seulement l'exposant de 5 dans la décomposition en produit de facteur premier de $n!$, car cela sera le plus petit des deux. comme 2016 est compris entre 625 et 3125, le nombre $\lfloor \log_5(n) \rfloor$ vaut 4. On doit calculer :

$$\sum_{i=1}^{4} \left\lfloor \frac{2016}{5^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2016}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2016}{625} \right\rfloor = 403 + 80 + 16 + 3 = 502$$

```
>>> x=1
>>> for i in range(1,2017):
     x*=i
>>> s=str(x)
>>> s[-503]
'4'
>>> s[-502]
'0'
>>> set(s[-502:])
{'0'}
```