Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 1— le 21 octobre 2016

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les exercices sont indépendants. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 24 points.

Exercice 1 [3 points]

Le professeur de Maths-discrètes vient à l'université à bicylette. Il dispose d'un antivol à code de 4 chiffres de 0 à 9 pour attacher son vélo.

Q 1.1 [1 point] Combien de codes sont possibles ?

Toutefois beaucoup de gens utilisent le quantième (numéro du jour dans le mois) et le numéro de mois de l'anniversaire d'un proche. (Les deux nombres sont écrits sur deux chiffres avec des zéros non significatifs si nécessaire)

Q 1.2 [1 point] À une unité près, combien y a-t-il de tels codes ?

Le professeur a bien choisi aléatoirement son code dans l'ensemble des codes possibles, toutefois il laisse échapper l'information suivante :

« tous les chiffres du code sont différents ».

Q 1.3 [1 point] Combien y a-t-il de codes possibles ?

Exercice 2 [6 points]

Lors d'une soirée, l'ensemble des convives est constitué par n couples. Il y a donc $2n$ personnes présentes. À l'arrivée, est remis à l'un des membres du couple un bracelet fluorescent jaune et à l'autre membre un bracelet fluorescent vert.

Soit k un entier fixé compris entre 0 et n.

Q 2.1 [1 point] Combien y a-t-il de manières de choisir un groupe de k personnes avec un bracelet fluorescent jaune ?

Q 2.2 [1 point] Combien y a-t-il de manières de choisir un groupe de n personnes dont exactement k possède un bracelet fluorescent jaune, et par conséquent $n-k$ un bracelet fluorescent vert. Dans la suite on note ce nombre $g_{n,k}$.

Q 2.3 [2 points] En utilisant la règle de la somme, donnez une expression faisant intervenir $g_{n,k}$ qui compte le nombre de manière de choisir n personnes dans cette assemblée de $2n$ personnes.

Q 2.4 [2 points] Démontrer la relation suivante :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 3 [5 points]

Cet exercice comporte 5 questions, chaque question est notée sur un point. Il y a cinq niveaux de réussite à chaque question : le niveau A correspond à la réussite complète à la question et on attribue 1 point, le niveau B correspond à une réponse partielle pour laquelle on attribue 0,75 point, le niveau C correspond à une réponse pour laquelle on attribue 0,5 point, le niveau D correspond à une réponse qui apporte 0,25 point et le niveau E est une réponse qui n'apporte aucun point.

Q 3.1 [1 point] Combien y a-t-il de mots sur l'alphabet $\{A, B, C, D, E\}$ qui décrivent la réussite à cet exercice ?

Q 3.2 [1 point] En remarquant que chaque question est notée en un nombre entier de quarts de point, donnez une équation dont les inconnues sont entières, et qui caractérise les réponses à l'exercice donnant la note $2,75$. On précisera bien les contraintes à imposer aux variables.

Q 3.3 [1 point] Compter le nombre de solutions à l'équation suivante :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

où les x_i sont des entiers naturels pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 5$.

Q 3.4 [1 point] Compter le nombre de solutions à l'équation suivante :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

où les entiers x_i vérifient pour tout indice i tel que $1 \leq i \leq 5$ la condition $0 \leq x_i \leq 4$.

Q 3.5 [1 point] Combien y a-t-il de mots de 5 lettres sur l'alphabet $\{A, B, C, D, E\}$ dont l'interprétation donne une note de $2,75$? Proposez du code Python permettant de vérifier le résultat.

Exercice 4 [10 points]

Q 4.1 [1 point] Combien y a-t-il de multiples de 2 dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$? Combien y a-t-il de multiples de 4 dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$?

Q 4.2 [1 point] Combien y a-t-il de multiples de 2 dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas des multiples de 4 ?

On désigne par k un entier naturel.

Q 4.3 [1 point] Plus généralement, combien y a-t-il de multiples de 2^k dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas des multiples de 2^{k+1} ?

Q 4.4 [2 points] Expliquez pourquoi l'exposant de 2 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $n!$ est :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor \right)$$

Q 4.5 [2 points] Démontrer que l'expression précédente vaut aussi :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$$

Q 4.6 [1 point] Généralisez le raisonnement précédent afin de connaitre l'exposant de 5 dans la décomposition en produit de facteur premier de $n!$.

Q 4.7 [2 points] Dans l'écriture décimale de $2016!$, combien y a-t-il de zéros à la fin ? (On rappelle quelques puissances de cinq : $5^2 = 25$ $\quad 5^3 = 125$ $\quad 5^4 = 625$ $\quad 5^5 = 3125$)