Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 3— le 6 juin 2016

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 5 exercices. Les questions sont indépendantes pour la plupart. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 26 points.

Exercice 1 [3 points]

Le restaurant "Au joyeux régime" propose sur sa carte "une farandole de crudités". Le client doit choisir cinq crudités parmi les six plats suivants : Laitue au vinaigre balsamique ; Carotte rapée au citron ; Tomate au basilic frais ; Champignons à la grecque ; Haricots verts à l'ail ; Concombre au fromage blanc.

Les répétitions sont autorisées. On peut donc faire le choix de prendre –par exemple– quatre plats de Laitue et un plat de tomate...

D'autre part les plats sont servis en même temps donc l'ordre n'importe pas.

Q 1.1 Combien de choix différents sont possibles ?

Q 1.2 J'aime la tomate, je souhaite choisir une farandole où il y a au moins deux fois de la tomate au basilic frais. Combien ai-je de choix différents ?

Q 1.3 Élisabeth souhaite éviter de prendre trois fois ou plus le même plat. Combien a-t-elle de choix ?

Exercice 2 [4 points]

Une grille carrée de $n \times n$ cases est remplie de 0 ou de 1.

On appelle *rangées* les lignes et les colonnes de cette grilles.

Q 2.1 Montrez qu'il existe nécessairement deux rangées qui ont le même poids.

Exercice 3 [10 points]

On désigne par n un entier.

Le but de cet exercice est de compter de plusieurs manières le nombre B_n de mots sur l'alphabet $X = \{$`'('`,`'['`,`']'`,`')'` $\}$ bien parenthésés et de longueur $2n$.

0.1 Version 1

Q 3.1 Combien y a-t-il de mots bien parenthésés de longueur $2n$ constitué uniquement des parenthèses `'('`,`')'` ?

On note k un entier compris au sens large entre 0 et n.

Q 3.2 Combien y a-t-il de mots bien parenthésés avec k crochets ouvrants `'['`et $n-k$ parenthèses ouvrantes `'('`. Indication : On pourra s'aider de la question précédente, et se dire qu'il suffit de choisir k parenthèses ouvrantes `'('` pour les transformer en crochet `'['`...

Dans la suite, on note B_n^k ce nombre.

Q 3.3 En déduire une expression de B_n sous la forme d'une somme $(\Sigma \ldots)$. On n'essaiera pas de calculer cette somme.

0.2 Version 2

On considère l'application ϕ définie de l'ensemble des mots bien parenthésés sur X de longueur $2n$ dans l'ensemble des mots bien parenthésés sur l'alphabet $\{$`'('`,`')'` $\}$ obtenue en remplaçant crochet ouvrant `'['` par parenthèse ouvrante `'('` et crochet fermant `']'` par parenthèse fermante `')'`

Q 3.4 Montrez que cette application est surjective.

Q 3.5 Quelle est la nature de la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des mots bien parenthésés sur X par $m_1 \mathcal{R} m_2$ ssi $\phi(m_1) = \phi(m_2)$.

Q 3.6 soit m un mot de l'ensemble Y_n (les mots bien parenthésés sur $\{$ `'('` , `')'`$\}$ et de longueur $2n$). Quel est le cardinal de $\{x \in X_n | \phi(x) = m\}$

Q 3.7 En déduire une autre expression du nombre B_n

0.3 Version 3

Q 3.8 Établir l'équation de récurrence

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} 2B_k B_{n-k}$$

Q 3.9 Effectuer le changement de variable

$$B_k = 2^k C_k$$

En déduire l'équation de récurrence vérifiée par C_n .

Q 3.10 Retrouver l'expression de B_n.

Exercice 4 [3 points]

Dans cet exercice f désigne une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

f est dite *ultimement périodique* lorsqu'il existe un entier T et un entier N_0 tel que pour tout entier k tel que $k \geq N_0$ on ait $f(k+T) = f(k)$. Sous forme mathématique cela s'écrit :

$$\exists T \in \mathbb{N} \qquad \exists N_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad k \geq N_0 \Longrightarrow f(k+T) = f(k).$$

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ des fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ *ultimement périodique*.

Q 4.1 Donnez une traduction mathématique de g **n'est pas** ultimement périodique.

Q 4.2 Soit n un entier fixé. Montrez qu'il y a un nombre fini d'applications f de $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ telles qu'on ait à la fois

— $T < n$
— $N_0 < n$
— $\forall k \in \mathbb{N} \qquad k \leq 2n \Longrightarrow f(k) \leq n$

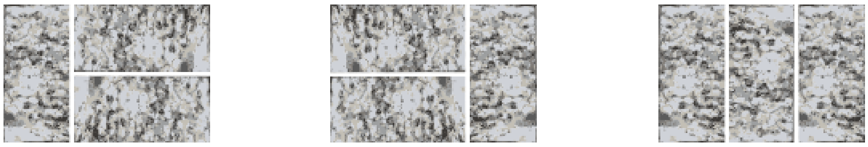
Q 4.3 Démontrez que l'ensemble $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ est dénombrable.

Exercice 5 [6 points]

Léonard doit paver un couloir rectangulaire. La longueur de ce couloir, exprimée en mètres, est n. Sa largeur est de deux mètres. Il dispose de n dalles en marbre. Chaque dalle possède une largeur de 1 m et une longueur de 2 m.

On se demande de combien de manières le couloir peut être pavé.

Par exemple, voici les trois manières de paver un couloir de 3 m de long :



et voici les cinq manières de paver un couloir de 4 m de long :

Q 5.1 Dessinez les différents pavages d'un couloir de longueur 5 m

On décide de noter u_n le nombre de pavages d'un couloir de n mètres. On admettra que si le couloir est de longueur nulle, il n'y a qu'une seule manière de le paver. Et on pose donc $u_0 = 1$.

Q 5.2 Donnez les valeurs de u_1,u_2,u_3 et u_4.

Q 5.3 Donnez une relation de récurrence reliant u_{n+1} aux termes précédents de la suite.

Q 5.4 Donnez une expression de u_n en fonction de n.