Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 2— le 8 janvier 2016

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 5 exercices. Les questions sont indépendantes pour la plupart. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 22 points.

Exercice 1 [3 points]

Un restaurant propose sur sa carte "une farandole de desserts". le consommateur doit choisir cinq desserts parmi les six desserts suivants : dame blanche ; gueule noire ; orange givrée ; tarte au sucre brun ; bavarois à la violette ; crème aux marrons.

Les répétitions sont autorisées. On peut donc faire le choix de prendre –par exemple– quatre dames blanches et une gueule noire...

Q 1.1 [1 point] Combien de choix différents sont possibles ?

Q 1.2 [1 point] Marie-Paule aime le parfum de la violette, elle souhaite choisir un dessert où il y a au moins deux fois du bavarois à la violette. Combien a-t-elle de choix différents ?

Q 1.3 [1 point] Renaud souhaite éviter de prendre trois fois ou plus le même plat. Combien a-t-il de choix ?

Exercice 2 [4 points]

Q 2.1 [1 point] Soit S une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal au moins 3. Prouvez qu'il existe deux éléments x,y de S tels que $x + y$ soit pair.

Q 2.2 [1 point] On considère maintenant une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Quel est le nombre minimal d'éléments de S permettant de garantir l'existence de (x_1, x_2) et (y_1, y_2), deux éléments de S, tels que les deux sommes $(x_1 + y_1)$ et $(x_2 + y_2)$ soient paires.

Q 2.3 [1 point] On considère une famille S de points du plan dont les coordonnées sont entières (toutes les deux !). Combien faut-il de points au minimum dans S pour être sûr qu'il existe un segment dont le milieu soit aussi à coordonnées entières ?

Q 2.4 [1 point] Soit n un entier naturel non nul. On considère maintenant une partie de $\mathbb{N}^n$. Quel est le nombre minimal d'éléments de S permettant de garantir l'existence de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ deux éléments de S telles que les n sommes $(x_1 + y_1)$ et $(x_2 + y_2)$, ... , $(x_n + y_n)$ soient paires ?

Exercice 3 [5 points]

Le langage de programmation Brainfuck est un langage de programmation sur un alphabet à 8 symboles.

Q 3.1 [1 point] n désigne un entier naturel. Combien y a-t-il de mots de n lettres sur cet alphabet ?

L'alphabet considéré contient un crochet ouvrant et un crochet fermant. La seule règle de syntaxe est que les crochets ouvrants `"["` et crochets fermants `"]"` doivent se correspondre, formant ainsi un mot bien parenthésé.

Q 3.2 [1 point] Combien de mots bien parenthésés, différents et de longueur $2k$ contenant uniquement des crochets peut-on écrire ?

On suppose $k \leq \frac{n}{2}$.

Q 3.3 [1 point] Combien de mots de longueur $n - 2k$ peut-on écrire avec les 6 symboles restants ?

Q 3.4 [1 point] Combien de programmes Brainfuck de longueur n , possédant k crochets ouvrants, syntaxiquement corrects, peut-on écrire ?

Q 3.5 [1 point] Combien de programmes Brainfuck de longueur n , syntaxiquement corrects, peut-on écrire ? On donnera le résultat sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 4 [3 points]

Dans cet exercice f désigne une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

f est dite *a support fini* lorsqu'il existe un entier n tel que pour tout entier k tel que $k \geq n$ on ait $f(k) = 0$. Sous forme mathématique cela s'écrit :

$$\exists n \in \mathbb{N} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad k \geq n \Longrightarrow f(k) = 0.$$

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{F}_0(\mathbb{N})$ des fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ *à support fini.*

Q 4.1 [1 point] Donnez une traduction mathématique de g **n'est pas** à support fini.

Q 4.2 [1 point] Soit n un entier fixé. Combien y a-t-il de fonctions f de $\mathcal{F}_0(\mathbb{N})$ telles qu'on ait à la fois

- $\forall k \in \mathbb{N} \qquad k \geq n \Longrightarrow f(k) = 0$
- $\forall k \in \mathbb{N} \qquad f(k) \leq n.$

Q 4.3 [1 point] Démontrez que l'ensemble $\mathcal{F}_0(\mathbb{N})$ est dénombrable.

Exercice 5 [7 points]

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On définit sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ une relation binaire de la manière suivante :

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad k \geq n \Longrightarrow f(k) = g(k).$$

Lorsque $f \mathcal{R} g$, on dira que f est *ultimement égale* à g.

Q 5.1 [4 points] Quelles propriétés possède la relation $\mathcal{R}$ ainsi définie ?

Q 5.2 [1 point] La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Q 5.3 [1 point] La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

Q 5.4 [1 point] Que dire de l'ensemble des fonctions f en relation avec la fonction nulle c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à tout entier n associe 0 ?