Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 1— le 17 octobre 2015

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les questions sont indépendantes pour la plupart. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 22 points.

Exercice 1 [3 points]

Une photocopieuse est à accès restreint. Il est nécessaire de composer un code de 4 chiffres de 0 à 9 pour pouvoir l'utiliser.

Q 1.1 [1 point] Combien de codes sont possibles ? *Éléments de réponse*

Il y a 10 choix pour chaque chiffre du code, en appliquant le principe du produit, on obtient $10^4 = 10000$ codes possibles.

Toutefois lorsqu'on examine soigneusement le clavier, on s'aperçoit que seules trois touches sont sales, la touche 4, la touche 3 et la touche 7. Si on est très observateur, on remarque même que la touche 4 est beaucoup plus sale que la touche 3 et la touche 7.

Q 1.2 [1 point] Combien y a-t-il de codes qui contiennent deux fois le 4 , une fois le 3 et une fois le 7 ? *Éléments de réponse*

$\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!} = 12$ et on peut même les exhiber tous : 3447, 3474, 3744 ,4347, 4374, 4437, 4473, 4743, 4734, 7344, 7434, 7443

L'observation à la dérobée d'un utilisateur de la photocopieuse, permet de savoir que le même chiffre n'est pas utilisé deux fois consécutivement.

Q 1.3 [1 point] Combien y a t'il de codes qui contiennent deux fois le 4, une fois le 3 et une fois le 7, et tel que le 4 n'est pas deux fois de suite. *Éléments de réponse*

$12 - 6 = 6$ on peut même les exhiber : 4347, 4374, 4743, 4734, 3474, 7434

Exercice 2 [7 points]

Dans un groupe de 10 étudiants présents, on fait passer une feuille de pointage sur laquelle ils inscrivent leurs noms les uns après les autres.

Q 2.1 [1 point]

Combien de feuilles différentes peut-on obtenir ?

Éléments de réponse

En attribuant un numéro de 1 à 10 à chaque étudiant, on peut mettre en bijection l'ensemble des feuilles de pointage et celui des permutations de l'ensemble $[\![1, 10]\!]$. Comme cet ensemble possède $10!$ éléments on en déduit que l'ensemble des feuilles de pointage admet aussi $10!$ éléments.

On souhaite répartir les étudiants en binôme. Une méthode consiste, en partant d'une feuille de pointage, à former les binômes en regroupant l'étudiant de rang $2i + 1$ avec celui de rang $2i + 2$, i variant de 0 à 4, étant entendu que le rang du premier étudiant sur la feuille vaut 1.

Une même répartition en binôme peut être obtenue de plusieurs manières différentes. Par exemple avec les deux feuilles de pointages $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ et $(d, c, b, a, e, f, i, j, h, g)$ on obtient la même répartition en binômes :

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}, \{i, j\}\}$$

Q 2.2 [1 point] Pour une répartition donnée, combien de feuilles de pointage donnent cette répartition ?
Éléments de réponse

Chaque paire peut être écrite dans les deux sens. Or il y a cinq paires. Cela fait donc 2^5 choix. Mais une fois les binômes constitués, il faut tenir compte des permutation de ces binômes. cela fait $5!$ manière de ranger les 5 binômes. Il y a donc $5! \times 2^5$ feuilles qui donne la même répartition

Q 2.3 [1 point] En déduire le nombre de manières de répartir 10 étudiants en binôme. *Éléments de réponse*

$$\frac{10!}{2^5 \times 5!}$$

Q 2.4 [2 points] Généralisez à un groupe de $2n$ étudiants, $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de réponse

$$\frac{2n!}{2^n \times n!}$$

Q 2.5 [2 points] Donnez une expression pour la quantité suivante :

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (2i + 1)$$

Éléments de réponse

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (2i + 1) \frac{2n!}{2^n \times n!}$$

Car

$$\begin{aligned}
\frac{2n!}{2^n \times n!} &= \frac{2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots \times 2}_{n} \times n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1} \\
&= \frac{((2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1) \times ((2n) \times (2n-2) \times (2n-4) \ldots \times 4 \times 2}{(2n \times (2n-2) \times (2n-4) \ldots \times 4 \times 2} \\
&= (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1 \\
&= \prod_{i=1}^{i=n-1} (2i + 1)
\end{aligned}$$

Exercice 3 [4 points]

Pour n désignant un entier strictement positif, on note $A_n = [\![1, n]\!]$ l'intervalle des entiers compris au sens large entre 1 et n.

Q 3.1 [1 point] Je choisis k entiers distincts dans A_n, avec $1 \leq k \leq n$. Puis j'en souligne un.

Combien y a-t-il de manières de le faire ? *Éléments de réponse*

$$\binom{n}{k} \times k$$

Q 3.2 [1 point] Déterminez le nombre de manières de choisir une partie non vide de A_n en soulignant l'un des éléments.

(Ind : Commencez par choisir l'élément x à souligner, et ensuite une partie de A_n privée de x.) *Éléments de réponse*

Il y a n choix possibles pour l'élément x à souligner. Il reste $n-1$ éléments. Il y a 2^{n-1} parties possibles.

Q 3.3 [2 points] Démontrez l'identité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Éléments de réponse

- version 1

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \\
&= n\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{((n-1)-k')!(k')!} \\
&= n\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

- version 2

$$f_n(x) = ((1+x)^n)$$

on dérive :

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

On utilise la formule du binome d'abord puis on dérive.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

On calcule $f_n'(1)$ de deux façons. et on obtient l'identité recherchée.
- version 3 preuve combinatoire d'après les deux questions précédentes, en sommant pour k variant de 1 à n le résultat obtenu à la question 1 on compte la même chose qu'à la question 2...

Exercice 4 [8 points]

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul. On s'intéresse aux permutations de $[\![1,n]\!]$. On représente cette permutation par un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans lequel chaque entier de $[\![1,n]\!]$ est présent exactement une fois.

Q 4.1 [1 point] Faites la liste des permutations de $[\![1,3]\!]$ en utilisant le format proposé.

Éléments de réponse

- $(1,2,3)$
- $(2,1,3)$
- $(3,2,1)$
- $(1,3,2)$
- $(2,3,1)$
- $(3,1,2)$

On dit qu'une permutation $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un dérangement de $[\![1,n]\!]$, si pour tout entier $1 \leq i \leq n$ on $x_i \neq i$, c'est-à-dire si dans la permutation aucun entier n'est à sa place.

Par exemple, $(1,4,2,3)$ n'est pas un dérangement $[\![1,4]\!]$ car 1 est à sa place. En revanche $(2,1,4,3)$ est un dérangement de $[\![1,4]\!]$.

Q 4.2 [1 point] Quels sont tous les dérangements de $[\![1,3]\!]$?

Éléments de réponse

- $(2,3,1)$
- $(3,1,2)$

Pour tout entier $1 \leq i \leq n$, on note A_i l'ensemble des permutations $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans lesquelles $x_i = i$, autrement dit laissant l'entier i fixe.

Q 4.3 [1 point] Quel est le cardinal de chacun des ensembles A_i ? *Éléments de réponse*

(n-1) !

Q 4.4 [1 point] Si i et j sont deux entiers distincts de $[\![1,n]\!]$, quel est le cardinal de $A_i \cap A_j$?

Éléments de réponse

(n-2) !

Q 4.5 [1 point] Si i_1, i_2,..., i_k sont k entiers distincts de $[\![1,n]\!]$, quel est le cardinal de $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$?

Éléments de réponse

i_1, i_2,..., i_k sont à leurs places. les $n-k$ autres nombres sont mélangés, or il y a $(n-k)!$ permutations de ces $n-k$ objets. $card\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = (n-k)!$

Q 4.6 [1 point] Combien y a-t-il de de k-uplets tels que :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\,?$$

Éléments de réponse

$\binom{n}{k}$

Q 4.7 [2 points] En appliquant le principe d'inclusion-exclusion donnez une expression du nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$ que vous désignerez par d_n ? *Éléments de réponse*

$$n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$