Mathématiques Discrètes

Devoir surveillé n° 1— le 17 octobre 2015

Prenez le temps de lire ce sujet. Ce devoir comporte 4 exercices. Les questions sont indépendantes pour la plupart. L'énoncé est un peu long mais le barème est sur 22 points.

Exercice 1 [3 points]

Une photocopieuse est à accès restreint. Il est nécessaire de composer un code de 4 chiffres de 0 à 9 pour pouvoir l'utiliser.

Q 1.1 [1 point] Combien de codes sont possibles ?

Toutefois lorsqu'on examine soigneusement le clavier, on s'aperçoit que seules trois touches sont sales, la touche 4, la touche 3 et la touche 7. Si on est très observateur, on remarque même que la touche 4 est beaucoup plus sale que la touche 3 et la touche 7.

Q 1.2 [1 point] Combien y a-t-il de codes qui contiennent deux fois le 4 , une fois le 3 et une fois le 7 ?

L'observation à la dérobée d'un utilisateur de la photocopieuse, permet de savoir que le même chiffre n'est pas utilisé deux fois consécutivement.

Q 1.3 [1 point] Combien y a t'il de codes qui contiennent deux fois le 4, une fois le 3 et une fois le 7, et tel que le 4 n'est pas deux fois de suite.

Exercice 2 [7 points]

Dans un groupe de 10 étudiants présents, on fait passer une feuille de pointage sur laquelle ils inscrivent leurs noms les uns après les autres.

Q 2.1 [1 point]

Combien de feuilles différentes peut-on obtenir ?

On souhaite répartir les étudiants en binôme. Une méthode consiste, en partant d'une feuille de pointage, à former les binômes en regroupant l'étudiant de rang $2i+1$ avec celui de rang $2i+2$, i variant de 0 à 4, étant entendu que le rang du premier étudiant sur la feuille vaut 1.

Une même répartition en binôme peut être obtenue de plusieurs manières différentes. Par exemple avec les deux feuilles de pointages $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ et $(d, c, b, a, e, f, i, j, h, g)$ on obtient la même répartion en binômes :

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}, \{i, j\}\}$$

Q 2.2 [1 point] Pour une répartition donnée, combien de feuilles de pointage donnent cette répartition ?

Q 2.3 [1 point] En déduire le nombre de manières de répartir 10 étudiants en binôme.

Q 2.4 [2 points] Généralisez à un groupe de $2n$ étudiants, $n \in \mathbb{N}$.

Q 2.5 [2 points] Donnez une expression pour la quantité suivante :

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (2i+1)$$

Exercice 3 [4 points]

Pour n désignant un entier strictement positif, on note $A_n = [\![1, n]\!]$ l'intervalle des entiers compris au sens large entre 1 et n.

Q 3.1 [1 point] Je choisis k entiers distincts dans A_n, avec $1 \leq k \leq n$. Puis j'en souligne un.

Combien y a-t-il de manières de le faire ?

Q 3.2 [1 point] Determinez le nombre de manières de choisir une partie non vide de A_n en soulignant l'un des éléments.

(Ind : Commencez par choisir l'élément x à souligner, et ensuite une partie de A_n privée de x.)

Q 3.3 [2 points] Démontrez l'identité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Exercice 4 [8 points]

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul. On s'intéresse aux permutations de $[\![1, n]\!]$. On représente cette permutation par un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans lequel chaque entier de $[\![1, n]\!]$ est présent exactement une fois.

Q 4.1 [1 point] Faites la liste des permutations de $[\![1, 3]\!]$ en utilisant le format proposé.

On dit qu'une permutation $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un dérangement de $[\![1, n]\!]$, si pour tout entier $1 \leq i \leq n$ on $x_i \neq i$, c'est-à-dire si dans la permutation aucun entier n'est à sa place.

Par exemple, $(1, 4, 2, 3)$ n'est pas un dérangement $[\![1, 4]\!]$ car 1 est à sa place. En revanche $(2, 1, 4, 3)$ est un dérangement de $[\![1, 4]\!]$.

Q 4.2 [1 point] Quels sont tous les dérangements de $[\![1, 3]\!]$?

Pour tout entier $1 \leq i \leq n$, on note A_i l'ensemble des permutations $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans lesquelles $x_i = i$, autrement dit laissant l'entier i fixe.

Q 4.3 [1 point] Quel est le cardinal de chacun des ensembles A_i ?

Q 4.4 [1 point] Si i et j sont deux entiers distincts de $[\![1, n]\!]$, quel est le cardinal de $A_i \cap A_j$?

Q 4.5 [1 point] Si i_1, i_2,..., i_k sont k entiers distincts de $[\![1, n]\!]$, quel est le cardinal de $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$?

Q 4.6 [1 point] Combien y a-t-il de de k-uplets tels que :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\,?$$

Q 4.7 [2 points] En appliquant le principe d'inclusion-exclusion donnez une expression du nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$ que vous désignerez par d_n ?