Codage de l'information

Devoir surveillé n° 2

5 janvier 2016 - Durée 2h - Documents autorisés. Calculatrices **non autorisées**

Veuillez indiquer le numéro de votre groupe de TD sur la copie qu'il est inutile de rendre anonyme, ainsi que votre NIP (figurant sur votre carte d'étudiant).

Ce sujet contient cinq exercices indépendants. Prenez 10 mn pour lire l'intégralité du sujet avant de commencer.

Vous **justifierez** avec soin l'ensemble de vos réponses.

Exercice 1-1 *Entropie*

Question 1 Peut-on trouver une source pour laquelle l'entropie soit strictement inférieure à 1 ?

Question 2 Peut-on trouver une source et un codage pour lequel la longueur moyenne sera strictement inférieure à 1 ?

Exercice 1-2 *Représentation des entiers*

Les entiers sont généralement représentés sur un nombre fixe de bits. Néanmoins Peter Elias a proposé en 1975 plusieurs façons de représenter les entiers positifs sur un nombre variable de bits. Nous allons nous intéresser à l'une de ces représentations : le codage γ. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N le nombre de minimal de bits pour la représentation binaire de n. Le résultat de $\gamma(n)$ consiste à écrire $N-1$ zéros suivis de la représentation binaire de n.

Question 1 Soit $\gamma(x) = 00000110110$, quelle est la valeur de x ?

Question 2 Donnez le résultat de $\gamma(21)$.

Question 3 Soit n l'entier à encoder, quelle sera la longueur du résultat de $\gamma(n)$ en fonction de n ?

Question 4 Supposons que nous ayons le choix entre stocker les entiers sur 16 bits ou en utilisant le codage γ. Pour quels entiers le codage γ sera plus économique en place que le codage à longueur fixe ? Est-il possible de stocker certains entiers avec le codage γ qui ne pourraient être stockés avec ce codage à longueur fixe ? Et inversement ?

Question 5 Soit L l'ensemble des mots produits par le codage γ jusqu'à un entier n fixé, quelconque. Pourquoi L est bien un code ?

Exercice 1-3 *Langages et codes*

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet contenant au moins deux symboles, et $c \in \mathcal{A}$ l'un de ces symboles. Nous étudions dans cet exercice le cas des langages dont la virgule n'est ni au début ni à la fin des mots du langage.

Question 1 Soient $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $u \neq v$ et contenant tout deux une seule fois le symbole c, ni en première ni en dernière position.

Le langage $L = \{u, v\}$ est-il un code ?

Question 2 Prenons maintenant un langage $L = \{u, v, w\}$ avec les mêmes contraintes sur ces trois mots qu'à la question précédente. C'est-à-dire que u, v et w contiennent tous les trois une seule occurrence d'un symbole c de l'alphabet et cette occurrence n'est ni au début ni à la fin des mots u, v ou w.

Le langage $L = \{u, v, w\}$ est-il un code ?

Exercice 1-4 *Codages optimaux*

Question 1 Soit un langage composé de cinq mots, sur un alphabet binaire. Donnez une distribution de longueurs des mots de ce langage pour que la somme de Kraft du langage soit égale à 1.

Question 2 Donnez un exemple de code binaire **non** préfixe, composé de cinq mots, dont la somme de Kraft soit égale à 1.

Question 3 Soit un alphabet $\mathcal{S}$={a, b, c, d, e}. Donnez une distribution de probabilités pour l'alphabet $\mathcal{S}$ ainsi qu'un codage utilisant le code obtenu à la question précédente de manière à ce que votre codage soit optimal pour la source constituée de votre distribution de probabilités et de l'alphabet $\mathcal{S}$.

Exercice 1-5 *Codages linéaires systématiques*

On nous donne une matrice génératrice d'un codage linéaire systématique C

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 1 On souhaite transmettre le message 101, quel sera le message transmis après encodage avec C ?

Question 2 Donnez une matrice de contrôle correspondant à cette matrice génératrice.

Question 3 Donnez les valeurs n, k et d de ce $[n, k, d]$-codage linéaire.

Question 4 En déduire les capacités de détection et correction de ce codage.

Question 5 Le mot $v = 0111011$ est reçu. Quelle conclusion peut-on tirer ?

Question 6 Le mot $v = 1001110$ est reçu. Quelle conclusion peut-on tirer ?