

Codage de l'information

Devoir surveillé n° 2

Jeudi 9 janvier 2014 - Durée 2h - Polycopié de cours autorisé. Calculatrices autorisées.

Veuillez indiquer le numéro de votre groupe de TD sur la copie qu'il est inutile de rendre anonyme.

Ce sujet contient deux exercices indépendants. Prenez 10mn pour lire l'intégralité du sujet avant de commencer.

Exercice 1-1 Codage de Fano

Le codage de Fano d'une source $S = (\mathcal{S}, \text{Pr})$ consiste à

1. trier les symboles de l'alphabet \mathcal{S} selon leur probabilité Pr ;
2. découper cette liste en deux de sorte que les probabilités cumulées de chacune des deux parties soient les plus proches possibles ; le codage des symboles de l'une des parties débute par 0, et celui de l'autre par 1 ;
3. on recommence l'étape 2 sur chacune des deux parties, tant que celles-ci ont au moins deux éléments.

Voici un exemple pour la source définie par

x	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
$\text{Pr}(S = x)$	0,4	0,17	0,17	0,15	0,11

Le codage de Fano de cette source se calcule en 3 itérations :

x	$\text{Pr}(S = x)$	étape 1	étape 2	étape 3
s_1	0,4	0	0	
s_2	0,17	0	1	
s_3	0,17	1	0	
s_4	0,15	1	1	0
s_5	0,11	1	1	1

La table du codage de Fano ainsi construite est

x	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
$\mathbf{c}(x)$	00	01	10	110	111

Question 1 Pourquoi ce procédé construit-il à coup sûr un codage pour n'importe quelle source ?

Question 2 Le codage de Fano construit dans l'exemple ci-dessus est-il optimal ?

Question 3 Déterminez un codage de Fano pour la source définie par

x	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$\text{Pr}(S = x)$	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1

Question 4 Le codage de Fano construit pour la source de la question précédente est-il optimal ?

Exercice 1-2 Codes correcteurs

On considère le codage des mots binaires de longueur 4 en des mots binaires de longueur 8

$$\mathbf{c} : \mathbb{F}_2^4 \longrightarrow \mathbb{F}_2^8$$

$$\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{v} = \mathbf{c}(\mathbf{u}) ,$$

défini par le circuit de la figure 1, à 4 bits en entrée et 8 bits en sortie construit uniquement avec des ou-exclusifs.

Question 1 Exprimez chacun des 8 bits du mot $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle = \mathbf{c}(\mathbf{u})$ en fonction des bits de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.

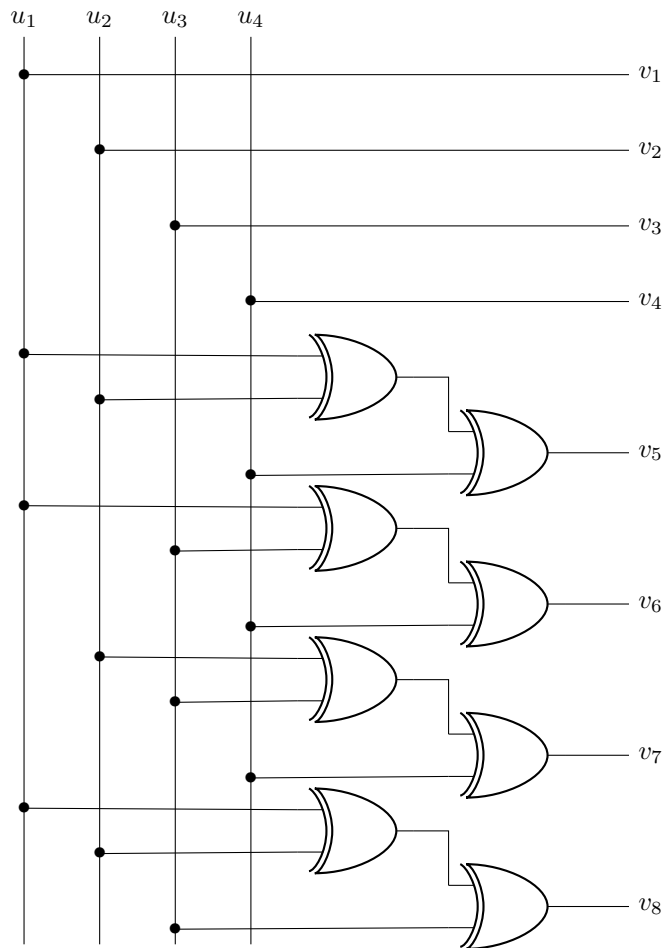


FIGURE 1 – Circuit définissant le codage \mathbf{c}

Question 2 Vérifiez que ce codage est linéaire, autrement dit que pour tous mots \mathbf{u} et \mathbf{u}' de longueur 4, on a

$$\mathbf{c}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{u}') = \mathbf{c}(\mathbf{u}) \oplus \mathbf{c}(\mathbf{u}').$$

Question 3 Déterminez la matrice génératrice de ce codage et une matrice de contrôle.

Question 4 Quels sont les rendements et capacités détectrices/correctrices d'erreurs de ce codage.

Question 5 Montrez que tous les mots du code associé sont de poids pairs.

Question 6 Parmi les trois mots qui suivent, quels sont ceux qui sont dans le code, et pour ceux qui n'y sont pas, peut-on les corriger ?

1. $\mathbf{v}_1 = \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \rangle ;$

2. $\mathbf{v}_2 = \langle 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \rangle ;$

3. $\mathbf{v}_3 = \langle 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0 \rangle .$
