29 août 2018
Licence Parcours Info
Omar Abdelkafi
François Lemaire
Arnaud Liefooghe
Sylvain Salvati
Marie-Émilie Voge
Léopold Weinberg

Université Lille1 Sciences et Technologies

ARO

TD 5

Q 1. On souhaite résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} 9\,x_1 + 2\,x_2 & = & z \quad [min] \\ 2\,x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1 - 2\,x_2 & \geq & 2 \\ x_1 & \geq & 3 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

On propose les démarches suivantes :

1. intuiter la solution optimale du primal, celle du dual, et vérifier qu'elles sont optimales ;
2. intuiter la solution optimale du primal, calculer la solution du dual qui lui est associée par le théorème des écarts complémentaires et vérifier ce qui doit l'être pour s'assurer de l'optimalité des deux solutions ;
3. résoudre le dual par l'algorithme du tableau simplicial (si vous connaissez à l'avance la solution optimale, on suggère de tricher pour le choix de la colonne du pivot) et déduire du résultat la solution optimale du primal.

Q 2. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 & = & z \quad [max] \\ 2\,x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

Écrire le programme linéaire dual.

On sait que ${}^t(0,\, 1/2,\, 5/2)$ est une solution optimale du dual. Utiliser le théorème des écarts complémentaires pour obtenir une solution optimale du primal.

Comment confirmer par une deuxième méthode que la solution obtenue est bien optimale ?

Q 3. Un fabricant d'emballages envisage l'achat de machines à plier le carton de deux types différents : les modèles A et B. Le modèle A permet de plier 30 boîtes à la minute et doit être alimenté et surveillé par une personne alors que le modèle B peut plier 50 boîtes à la minute et requiert deux personnes. Le fabricant doit mettre en forme au moins 1200 boîtes à la minute. Il ne dispose que de 120 employés. Une machine du modèle A coûte 15000 euros. Une machine du modèle B coûte 20000 euros. Combien de machines de chaque type le fabricant doit–il acheter pour minimiser son investissement ?

Q 4. India Coffee Mart (ICM) commercialise du café en poudre qu'elle prépare en mélangeant du café en provenance du sud de l'Inde, de l'Assam et importé d'Afrique. Un kilo de café du Sud coûte 28 roupies, un kilo de café d'Assam coûte 30 roupies et le café d'importation revient à 32 roupies. Les ventes mensuelles de café s'élèvent à 5000 kilos, mais on ne peut pas disposer de plus de 1500 kilos de café du sud de l'Inde et il faut utiliser au moins 1000 kilos de café d'Assam et 1000 kilos de café d'Afrique pour le mélange. Déterminer la composition du mélange optimale du point de vue du coût.

Q 5. On s'intéresse à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Comme l'illustre l'exercice précédent, tout système d'équations linéaires peut être transformé en un système de satisfaction de demande. Pour peu qu'on choisisse un objectif économique avec des coût positifs, le dual de ce programme de satisfaction de demande est un programme linéaire qui relève du cas favorable. On sait que la solution optimale du primal peut se lire dans le tableau simplicial final du dual. En mettant toutes ces phrases bout–à–bout, on serait tenté de conclure que tout système d'équations linéaires admet au moins une solution, ce qui est manifestement faux. Où est l'erreur ?

Le problème de la diète

On cherche à choisir des combinaisons de plats préparés pour satisfaire certains besoins nutritionnels. Les repas sont composés à partir de mélanges des différents plats en quantités plus ou moins importantes. Dans la première colonne du tableau on trouve les plats. Les prix par unité sont indiqués dans la deuxième. Les quatre dernières colonnes donnent pour chaque vitamine v et chaque plat p le pourcentage du besoin quotidien de vitamine v apporté par une unité du plat p.

plat	prix (en $ par unité)	A	$B1$	$B2$	C
bœuf	3.19	60	20	10	15
poulet	2.59	8	0	20	20
poisson	2.29	8	10	15	10
jambon	2.89	40	40	35	10
fromage	1.89	15	35	15	15
escalope	1.99	70	30	15	15
spaghetti	1.99	25	50	25	15
dinde	2.49	60	20	15	10

On cherche une combinaison qui minimise les coûts et satisfasse les besoins hebdomadaires en vitamines, soit au moins 700% des besoins quotidiens, mais sans excéder 1200%. Pour promouvoir une certaine diversité, on impose que chaque plat soit choisi au moins deux fois et au plus dix fois par semaine.

Q 6. Proposer un modèle AMPL. Quelle est la solution optimale ?

Q 7. Déterminer les valeurs marginales des contraintes et les interpréter.