

## 1 Problèmes de démarrage

**Q1.** Résoudre les programmes linéaires suivants par l'algorithme du tableau simplicial. Appliquer éventuellement la méthode des deux phases. Vérifier graphiquement quand c'est possible. Certains indices sont donnés pour simplifier dans certains cas la résolution.

$$\begin{array}{l}
 (P_1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = z[\min] \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (P_2) \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = z[\min] \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \\
 (P_3) \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = z[\min] \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad (P_4) \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = z[\min] \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

**Indices pour  $P_1$ .** Introduire deux variables d'écart plus une seule variable artificielle (le problème est peut-être sans solution!).

**Indices pour  $P_2$ .** On pourrait utiliser la méthode des deux phases en introduisant deux variables artificielles ( $x_4$  et  $x_5$ ). Toutefois, en faisant deux opérations élémentaires sur les deux premières lignes, on peut se ramener à deux contraintes d'égalités où  $x_2$  n'apparaît que dans la première équation, et  $x_3$  n'apparaît que dans la deuxième.

**Indices pour  $P_3$ .** En transformant légèrement les deux contraintes d'égalité, on peut limiter le nombre de nouvelles variables à introduire.

**Indices pour  $P_4$ .** La résolution peut être faite de façon simple.

## 2 Terminaison

On sait que l'algorithme du simplexe, muni de la stratégie de choix du pivot énoncée en cours peut boucler indéfiniment (cf. support de cours). Dans l'exemple donné, la valeur de  $z_0$  est stationnaire : l'algorithme énumère cycliquement une suite de bases pour lesquelles la valeur de  $z_0$  vaut toujours zéro.

**Q1.** Trouver un exemple pour lequel l'algorithme boucle indéfiniment sans que la valeur de  $z_0$  reste stationnaire ou montrer qu'un tel exemple n'existe pas.