

1 Mise en équation et algorithme du tableau simplicial

Q1. Résoudre par l'algorithme du tableau simplicial et interpréter graphiquement les programmes linéaires suivants.

$$(P_1) \begin{cases} x_2 - x_1 = z(\min) \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} -x_1 + x_2 = z(\max) \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \geq -4 \\ -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (P_3) \begin{cases} x_1 - x_2 = z(\max) \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q2. Une usine utilise les matières premières du type A, B, C pour fabriquer les produits P_1, P_2, P_3, P_4 (voir tableau). Que faut-il produire pour maximiser les bénéfices ? Donner une formulation mathématique sous forme standard et une modélisation en AMPL.

	quantités disponibles (tonnes)	cons. (tonnes/produit)			
		P_1	P_2	P_3	P_4
A	1500	5	1	9	12
B	1000	4	3	4	1
C	800	3	2	5	10
	prix de vente (euros)	12	5	15	10

Q3. Mettre en équation le problème suivant :

Un torréfacteur mélange du café brésilien et du café colombien pour préparer deux sortes de café : Super ou Extra. Chaque kg de Super contient 0.5kg de café brésilien et 0.5kg de café colombien, tandis que chaque kg de Extra contient 0.25kg de café brésilien et 0.75kg de café colombien. Il a en stock 120kg de café brésilien et 180kg de café colombien. Si le bénéfice sur chaque kg de café Super est de 50 centimes et sur chaque kg d'Extra de 30 centimes, combien de kg de chaque type de café doit-il mélanger pour maximiser son profit ?

Résoudre ce problème par la méthode du tableau simplicial et vérifier graphiquement.

2 Gestion de stock

Deux usines produisent du papier de trois qualités différentes. Elles ont des commandes pour chaque type de papier : la compagnie qui gère les usines a des contrats pour fournir 16 tonnes de papier de qualité inférieure, 5 tonnes de papier de qualité moyenne et 20 tonnes de papier de qualité supérieure. Il coûte 1000 euros par jour pour faire fonctionner l'usine A et 2000 euros par jour pour l'usine B. L'usine A produit 8 tonnes de papier de qualité inférieure, 1 tonne de papier de qualité moyenne et 2 tonnes de papier de qualité supérieure par jour. L'usine B produit 2 tonnes de papier de qualité inférieure, 1 tonne de papier de qualité moyenne et 7 tonnes de papier de qualité supérieure par jour. On cherche combien de jours chaque usine doit fonctionner afin de satisfaire la demande de la façon la plus économique.

Q1. Mettre le problème en équations. Former le premier tableau simplicial. Le programme linéaire satisfait-il les invariants de boucle de l'algorithme du tableau simplicial ?

Q 2. Modéliser le problème en AMPL.

L'activité planifiée ci-dessus correspond à une semaine. On souhaite maintenant la planifier sur $N = 3$ semaines. Les quantités de papier commandées varient en fonction des semaines. La compagnie peut stocker les papiers fabriqués d'une semaine sur l'autre pour pouvoir répondre à la demande. Le stock lui coûte 5 euros par tonne et par semaine. Il existe un stock initial. La compagnie exige qu'à la fin des N semaines le stock final soit supérieur ou égal au stock initial pour chaque type de papier. Planifier l'activité des usines (quantités produites, stockées ainsi que les nombres de jours de fonctionnement hebdomadaires) de façon à minimiser les frais sur l'ensemble de la période.

	stock initial	quantité commandée		
		1	2	3
inférieur	4	16	18	22
moyen	7	10	8	9
supérieur	0	20	14	23

Les questions qui suivent sont destinées à aider à la modélisation en AMPL.

On propose d'utiliser deux variables $qte_produite$ et qte_stock indicées à la fois par les semaines et par les types de papiers. Pour répondre aux questions, on a aussi besoin d'une variable $jours_ouvres$ indicée à la fois par les semaines et les usines. On suggère de déclarer une variable $frais_hebdo$ indicée par les semaines, permettant de connaître les frais de fonctionnement de chaque semaine.

Q 3. Quelle relation lie $qte_produite$ et $jours_ouvres$?

Q 4. On pose que $qte_stock[s, p]$ vaut le nombre de tonnes de papier de type p disponible en stock en début de semaine s . Écrire alors la ou les contraintes qui lient $qte_produite$ et qte_stock .

Q 5. Si on avait posé que $qte_stock[s, p]$ valait le nombre de tonnes de papier de type p mises en stock à la fin de la semaine s , comment aurait-on dû écrire les contraintes ci-dessus?

Q 6. Finir la modélisation et résoudre le problème par logiciel. Que se passe-t-il si on impose que le stock final soit égal au stock initial (expliquer)?