

Uniquement le polycopié de cours autorisé
Calculatrices, dictionnaires électroniques, téléphones interdits.

Sujet à rendre
Indiquez votre numéro :

1 Questions sur le DM

Nous souhaitons généraliser le problème du DM, en considérant un nombre quelconque de divisions (D1, D2, ...). On introduit un ensemble DIVISIONS, qui ne sera fixé que dans la partie data.

Voici une ébauche d'un fichier ampl, qui fixe des noms de paramètres et variables. Lisez cette ébauche avant de répondre aux questions.

```
#-----
set DETAILLANTS;
set REGIONS;
set CATEGORIES;

# Les données de l'énoncé

param region {DETAILLANTS} symbolic in REGIONS; # R1, R2 ou R3
param categorie {DETAILLANTS} symbolic in CATEGORIES; # A ou B
param huile {DETAILLANTS} >= 0; # en unités d'H.
param nb_pts_vente {DETAILLANTS} >= 0; # en nombre de pts
param spiritueux {DETAILLANTS} >= 0; # en unités de S.

# Ensemble de divisions
set DIVISIONS; # D1, D2, D3, ...

var est_affecte {DETAILLANTS, DIVISIONS} binary;
/*
  est_affecte[det,divi] = 1 si le détaillant det est affecté
  à la division divi, et 0 sinon
*/

/* Paramètre calculé, contenant le nombre de divisions */
param nb_divisions =
  sum ....

/* Paramètre calculé, contenant le marché total de l'huile
  (somme du marché d'huile pour tous les détaillants)*/
param marche_total_huile =
  sum ...

#-----
data;

set DETAILLANTS := M1 M2 M3 M4 M5 M6 M7 M8 M9 M10 M11 M12 M13 M14 M15
  M16 M17 M18 M19 M20 M21 M22 M23;
set REGIONS := R1 R2 R3;
set CATEGORIES := A B;

set DIVISIONS := D1 D2 D3 D4;

param : region    huile nb_pts_vente spiritueux categorie :=
```

M1	R1	9	11	34	A
M2	R1	13	47	411	A
M3	R1	14	44	82	A
.... lignes supprimées ...					
M20	R3	15	19	28	A
M21	R3	15	14	69	B
M22	R3	25	10	65	B
M23	R3	39	11	27	B;

Les réponses aux questions qui suivent doivent encore fonctionner si on modifie l'ensemble DIVISIONS de la partie data, ce qui signifie que vos réponses doivent fonctionner si on augmente le nombre de divisions à 5 par exemple.

Q 1 . Quel solveur doit-on utiliser ? Quelle commande permet de lancer la résolution ?

Q 2 . On veut affecter chaque détaillant à exactement une division. En vous servant de la variable `est_affecte`, donnez en AMPL une façon d'exprimer cette contrainte.

Q 3 . Donnez en AMPL la commande permettant de calculer le paramètre calculé `nb_divisions`.

Q 4 . Donnez en AMPL la commande permettant de calculer le paramètre calculé `marche_total_huile`.

Q 5 . On souhaite que le marché de l'huile soit réparti équitablement entre toutes les divisions à 10% près. Par exemple, si il y a 4 divisions, chaque division doit récupérer un quart du marché, à plus ou moins 10%. Ainsi, dans ce cas, la proportion du marché doit être comprise entre $0.25 \cdot 0.9$ et $0.25 \cdot 1.1$ (le 0.25 étant égal à 1 divisé par le nombre de divisions). Donnez en AMPL une façon d'exprimer cette contrainte.

2 Exercice programmation linéaire

Un semencier s'est engagé à produire 600 sachets de graines de courgette, 1400 sachets de graines de chou et 900 sachets de graines de carottes. Il hésite entre une méthode « bio » et une méthode plus industrielle (une combinaison des deux méthodes est possible aussi). La méthode « bio » permet de produire 100 sachets de chaque type de végétal par semaine. La méthode industrielle permet de produire 150 sachets de graines de courgette, 100 sachets de graines de chou et 50 sachets de graines de carottes par semaine. La méthode « bio » coûte 500 euros par semaine contre 300 euros par semaine pour la méthode industrielle. Le semencier cherche combien de semaines pratiquer les deux méthodes de façon à minimiser les coûts tout en satisfaisant la demande.

Q 6 . Montrez qu'on peut modéliser le problème sous la forme du problème PL1 (ci-dessous), où x_1 est le nombre de semaines d'utilisation de la méthode « bio », et x_2 est le nombre de semaines d'utilisation de la méthode industrielle :

$$\begin{array}{rcl}
 \dots x_1 + \dots x_2 & = & z[\min] & \text{PL1} \\
 \dots & \geq & 600 \\
 \dots & \geq & 1400 \\
 \dots & \geq & 900
 \end{array}$$

Q 7 . Vous devez répondre à cette question sur la page quadrillée page 6. Résoudre graphiquement le problème, en faisant apparaître au moins deux droites d'objectif sur votre dessin. Vous mettrez obligatoirement x_1 en abscisse et x_2 en ordonnée. Précisez la solution optimale, ainsi que l'objectif à la solution optimale.

Q 8 . Le programme linéaire PL1 est-il sous forme canonique ? Si oui, passez à la question suivante. Si non, le mettre sous forme canonique (avec minimisation d'objectif), et ce en n'utilisant que les variables x_1 et x_2 .

Dans la suite, le programme linéaire sous forme canonique est noté PLC.

Q 9 . En une phrase, expliquez si oui ou non le programme linéaire PLC pose un problème de démarrage.

Q 10 . Écrire le dual de PLC.

Q 11 . Résoudre le dual par l'algorithme du tableau simplicial (il n'y a que 2 itérations).

Q 12 . Dédurre du tableau simplicial final du dual, la solution optimale du primal, et l'objectif réalisé à l'optimum du primal.

Q 13 . Proposer une interprétation du programme dual (imaginer un semencier concurrent ; que représentent les variables du dual ?).

Q 14 . Déterminer sans faire de calcul supplémentaire comment évolueraient les dépenses du semencier si la quantité de courgettes commandées augmentait d'une petite quantité, à savoir 10 ? Justifiez.

3 Fonction mystère

fonction mystère (G)

entrée : G est un graphe orienté

début

vider la file F

vider la liste L

pour tout sommet x faire

si x n'a pas de prédécesseur alors

colorier x en vert

enfiler x dans F

sinon

colorier x en bleu

finsi

fait

tant que (la file F n'est pas vide) faire

défiler x de la file F

colorier x en rouge

ajouter x à la fin de la liste L

pour tout successeur y de x faire

si y n'a aucun prédécesseur bleu alors

colorier y en vert

enfiler y dans la file F

finsi

fait

fait

si il existe un sommet bleu alors

déclencher une erreur

finsi

renvoyer L

fin

FIGURE 1 – La fonction mystère

On considère les quatre invariants de boucle suivants, que l'on suppose démontrés (vous pouvez vous en servir dans les questions de l'exercice) sauf si on vous demande de les redémontrer :

I1 un sommet est vert si et seulement si il est dans la file F

I2 un sommet est rouge si et seulement si il est dans la liste L

I3 tout élément de la liste L a tous ses prédécesseurs présents dans L à une position antérieure

I4 tout prédécesseur y d'un élément x de la file, est soit rouge, soit dans la file à une position antérieure (ce qui signifie que y sortira de la file avant x)

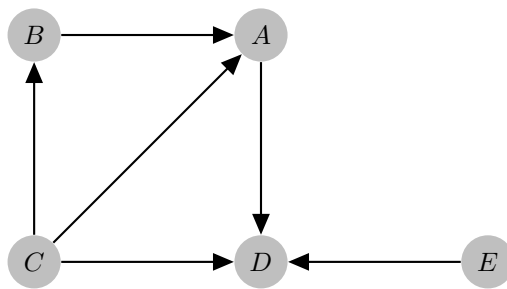


FIGURE 2 – Graphe orienté

Q 15 . Détaillez le déroulement de la fonction `mystere` sur le graphe de la figure 2. Vous suivrez les consignes suivantes :

- une file vide dans laquelle on enfilerait A, D puis E sera représentée par $A \rightarrow D \rightarrow E$ (autrement dit, les valeurs sont défilées à gauche, et enfilées à droite)
- toutes les boucles énumèrent les sommets par ordre alphabétique
- les valeurs des variables seront données au moment où on évalue la condition de la boucle tant que
- vous donnerez les valeurs des variables dans un tableau de la forme

F	L	sommets rouges	sommets verts	sommets bleus

Q 16 . Peut-il rester des sommets bleus à la sortie de la boucle tant que ? Si oui, donnez un exemple de graphe. Si non, prouvez le.

Q 17 . Redémontrez en deux ou trois phrases courtes l'invariant **I1**. On rappelle que pour démontrer un invariant de boucle, il faut montrer qu'il est vrai à chaque fois qu'on évalue la condition du tant que. Dit autrement, il faut montrer que l'invariant est vrai juste avant la boucle tant que, et qu'il reste vrai à chaque exécution du corps de la boucle tant que.

Q 18 . Montrez en une phrase que s'il reste un sommet bleu à la sortie de la boucle tant que, alors ce sommet a obligatoirement un prédécesseur.

Q 19 . Montrez que s'il reste un sommet bleu à la sortie de la boucle tant que, alors au moins l'un de ses prédécesseurs est bleu.

Q 20 . En utilisant la question précédente, montrez que s'il reste un sommet bleu à la sortie de la boucle tant que, alors il existe un cycle qui passe uniquement par des sommets bleus.

Q 21 . En supposant qu'il ne reste aucun sommet bleu à la sortie de la boucle, montrer que la liste L contient tous les sommets, et que chaque élément de L a tous ses prédécesseurs à une position antérieure dans L . N'oubliez pas de vous servir des invariants.

Q 22 . Dédurre de la question précédente une spécification de la fonction `mystère`, ainsi qu'une condition d'utilisation garantissant que l'erreur ne sera pas déclenchée.

On s'intéresse maintenant à la complexité en le nombre de fois que l'on teste la couleur d'un sommet.

Q 23 . Supposons que le test « y n'a aucun prédécesseur bleu » est codé par une boucle testant la couleur de tous les prédécesseurs de y . Donnez un exemple de graphe pour lequel l'algorithme teste plusieurs fois la couleur des prédécesseurs d'un même sommet y .

Q 24 . La complexité de l'algorithme complet est-elle en $O(m)$? Si oui montrez-le, sinon donnez un contre-exemple.

Q 25 . Donnez les grandes lignes d'une modification de l'algorithme, qui éviterait de tester inutilement la couleur des sommets. Quelle serait sa complexité (justifiez en donnant les idées clés) ?

4 Problème d'affectation

On veut attribuer des cadeaux à des enfants. Il y a 5 cadeaux (C_1, C_2, \dots, C_5) et 2 enfants (E_1 et E_2). Chaque enfant fait une liste de 3 cadeaux qu'il désire. Au final chaque enfant doit recevoir 2 cadeaux de la liste qu'il a faite. Ainsi, 4 cadeaux seront attribués en tout, et un cadeau ne sera pas attribué.

Chaque cadeau est soit de type éducatif, soit de type loisir. De plus, on veut que dans les 4 cadeaux offerts, 2 soient de type éducatif, et 2 de type loisir.

Le problème de l'affectation consiste à trouver quels cadeaux donner aux enfants tout en satisfaisant la liste de vœux et les contraintes sur les types de cadeau.

Les 2 enfants ont fait les listes suivantes :

- liste de E_1 : C_1, C_2 et C_4
- liste de E_2 : C_2, C_3 et C_5

De plus, les 5 cadeaux sont du type :

- éducatif : C_1, C_2, C_3
- loisir : C_4, C_5

Q 26 . Montrez que l'affectation $C_1, C_4 \rightarrow E_1$ et $C_2, C_5 \rightarrow E_2$ vérifie les contraintes.

Q 27 . Montrez que l'affectation $C_1, C_2 \rightarrow E_1$ et $C_3, C_5 \rightarrow E_2$ ne vérifie pas les contraintes.

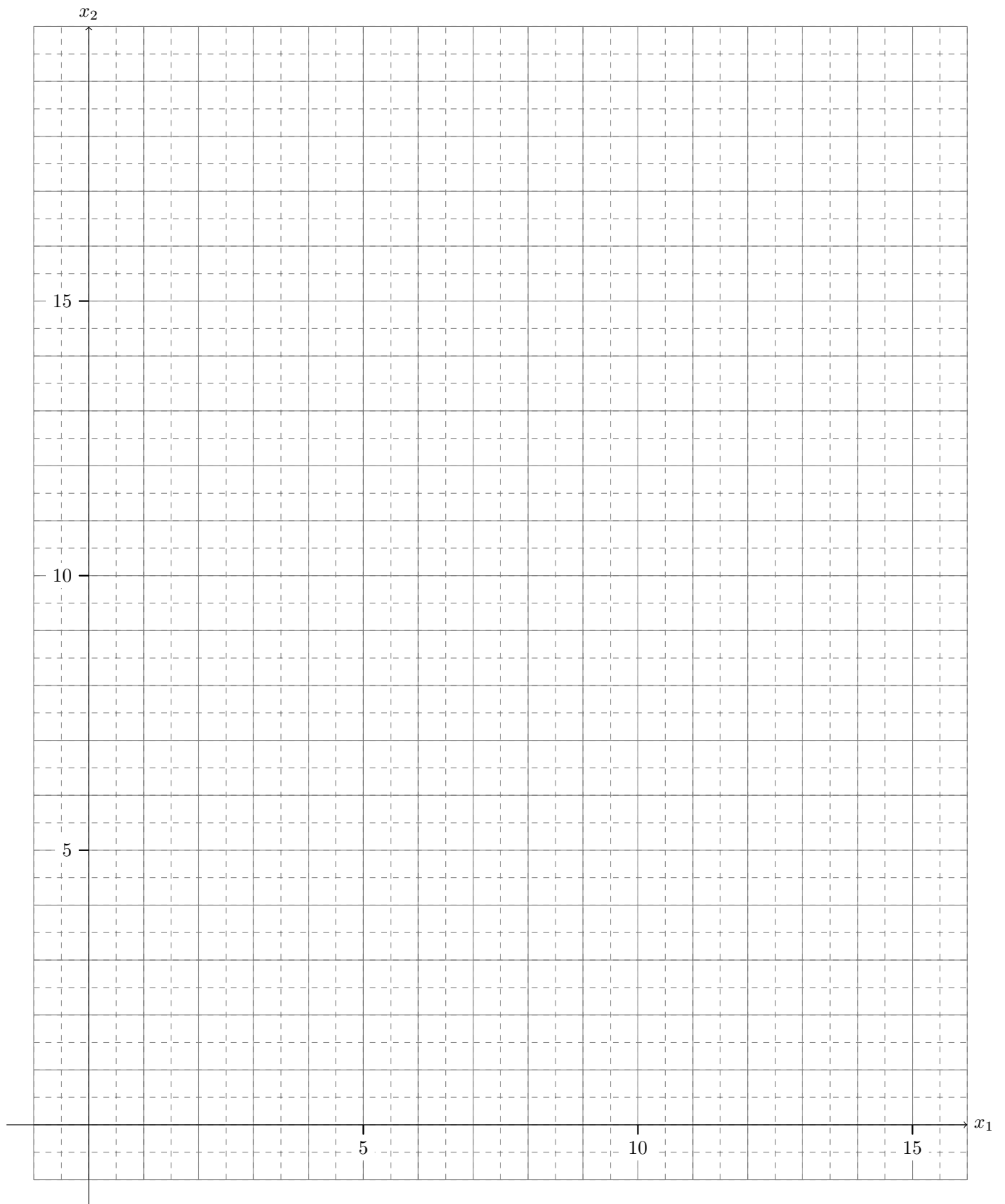
Q 28 . Montrez qu'on peut coder notre problème en calculant le flot maximal d'un réseau de transport que vous détaillerez. Pour cette question, vous dessinerez sur votre copie un réseau de transport dont la majorité des capacités sont des 1, et vous donnerez une condition sur la valeur du flot maximal garantissant l'existence d'une solution au problème d'affectation.

Q 29 . Pour cette question, vous devez compléter la feuille donnée à la fin du sujet. Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson en remplissant les figures de la page 7. Appliquez bien les consignes demandées en haut de la page 7.

Q 30 . Donnez la coupe minimale (ainsi que son flot et sa capacité) produite par le dernier appel à la fonction `chaîne_améliorante_?` (c'est-à-dire le dernier appel qui constate qu'il n'y a plus de chaîne améliorante).

Q 31 . Quelle affectation vous a fourni l'application de l'algorithme du flot maximal? La valeur du flot est-elle en accord avec l'existence d'une solution?

Résolution graphique (programmation linéaire)

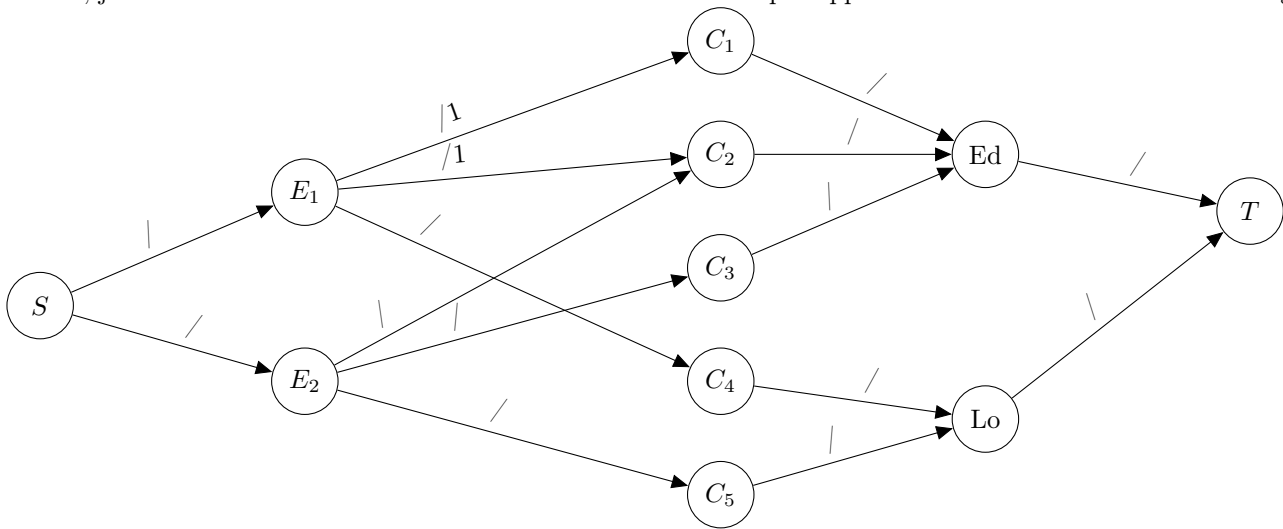


Réponse pour l'algorithme de Ford-Fulkerson

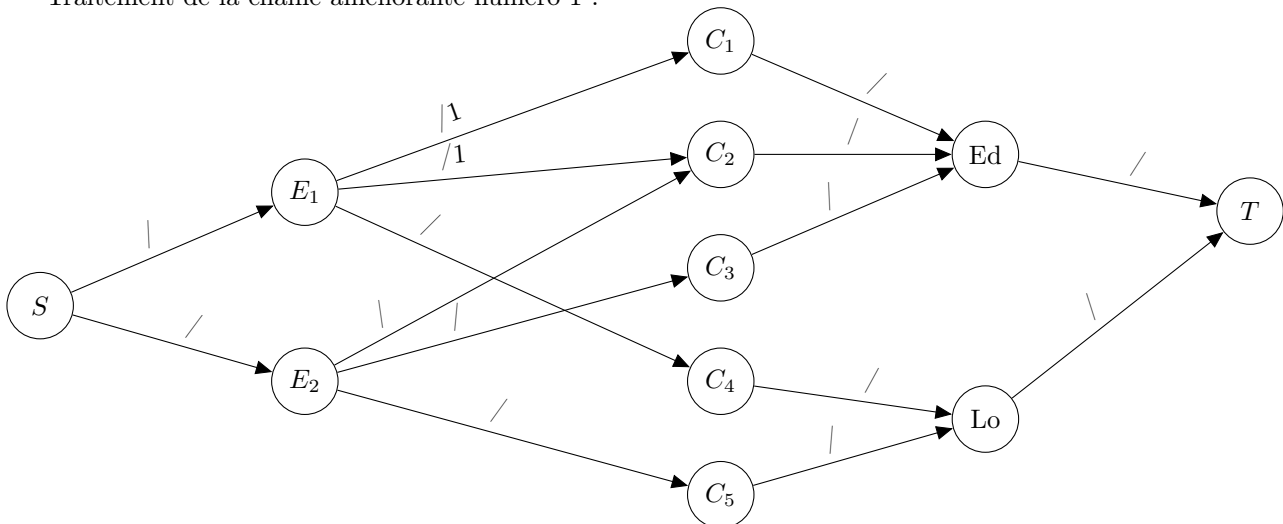
Consignes :

- sur chacun des graphes, vous devez compléter toutes les valeurs des flux et des capacités, à l'endroit où se situe la barre oblique.
- la chaîne améliorante sera déterminée en utilisant obligatoirement la fonction `chaîne_améliorante_?` du polycopié. De plus, les voisins (dans la boucle `pour tout voisin bleu`) seront traités dans l'ordre suivant : les voisins de droite pris de haut en bas, puis les voisins de gauche pris de haut en bas. Ainsi, les voisins de C_2 sont traités dans l'ordre : E_d , E_1 , et E_2 .
- vous surlignerez la chaîne améliorante à chaque étape, et mettrez à jour les valeurs des flux sur le même graphe.

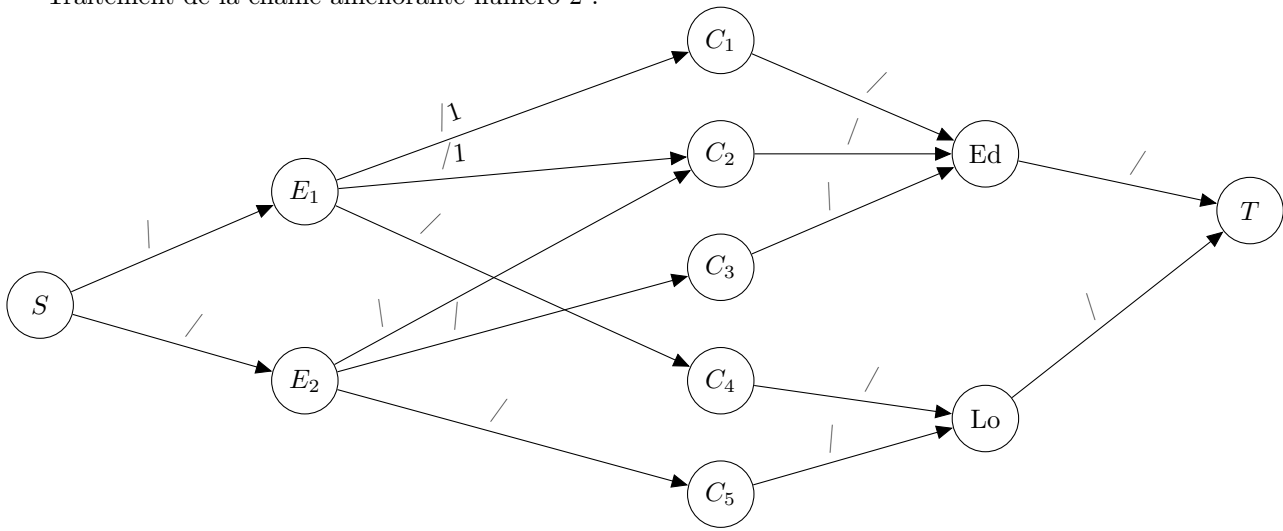
Initialisation de l'algorithme : indiquer sur ce graphe les capacités et les valeurs des flux au démarrage de l'algorithme, juste avant le traitement de chaîne améliorante. Ne faites pas apparaître de chaîne améliorante sur ce graphe.



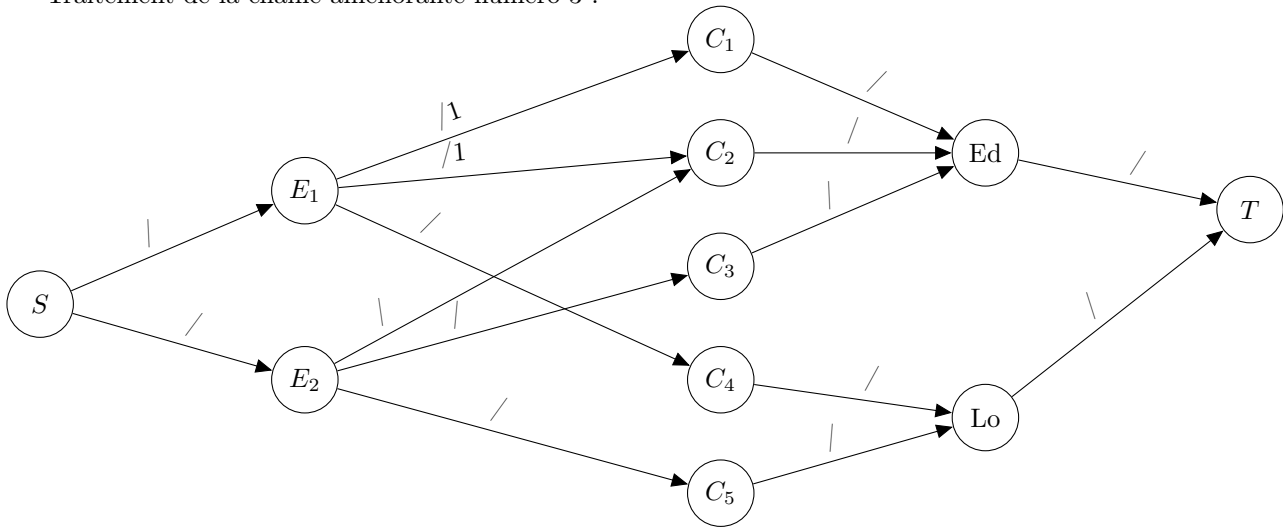
Traitement de la chaîne améliorante numéro 1 :



Traitement de la chaîne améliorante numéro 2 :



Traitement de la chaîne améliorante numéro 3 :



Traitement de la chaîne améliorante numéro 4 :

