Formations en Informatique de Lille – 2018/2019

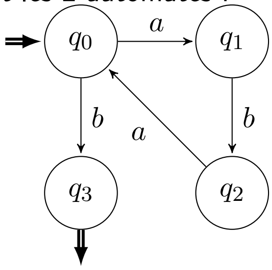
TD3 - Automates et Langages

septembre 2018

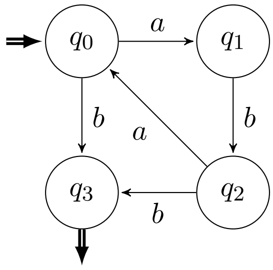
Automates déterministes

Exercice 1 :

Soient les 2 automates :



A :



B :

Q 1 . Pour chacun d'eux,

- Indiquez les 4 plus petits mots acceptés
- Trouvez une expression rationnelle dénotant le langage reconnu.

Exercice 2 :

On considère l'alphabet $B = \{0, 1\}$.

Q 1 . Donner un automate qui reconnaît les mots de B^* qui possèdent au moins deux 0 (non nécessairement consécutifs).

Q 2 . Donner un automate qui reconnaît les mots de B^* dont 00 n'est pas facteur.

Q 3 . Donner un automate qui reconnaît les mots de B^* qui ont un nombre pair de 1.

Q 4 . Donner un automate qui reconnaît les mots de B^* qui ont un nombre pair de 1, et pair de 0.

Exercice 3 :

Le prix du café dans une machine à café est de 50c. En temps ordinaire, la machine est en attente d'un achat. Un client peut alors glisser des pièces de 10c, 20c, ou 50c. Sitôt la somme de 50c atteinte ou dépassée, le café est servi. La machine attend alors que le client ait retiré son gobelet, puis se remet en attente d'un nouvel achat. Un bouton d'annulation permet au client de renoncer à sa commande et d'être remboursé. Dès que la somme versée atteint ou dépasse 50c, l'action sur le bouton annulation possible mais sans effet.

Vous modéliserez le comportement de la machine à café par un automate déterministe. L'alphabet d'entrée est composé des **évènements** qui peuvent se produire et qui sont déclenchés par différents capteurs : $\{1, 2, 5, a, r\}$. La sémantique associée à cet alphabet :

- 1, 2, 5 : introduction d'une pièce de 10c, 20c, 50c (respectivement)
- a : annulation
- r : retrait par le client du gobelet servi.

Le langage reconnu par l'automate sera celui des séquences d'évènements à l'issue desquels la machine est en attente d'un achat. par exemple $5r$, $222r$, $21a$, a

Note 1 : on considère que tant que la somme de 50c n'est pas atteinte, le bouton de remboursement est désactivé : l'évènement r ne devrait donc pas se produire à cette étape. De même l'introduction de monnaie est considérée comme bloquée pendant la préparation du café et ce jusqu'à ce que le gobelet soit retiré : là aussi, les évènements 1,2,5 ne devraient pas se produire à cette étape. Vous pouvez donc soit les ignorer soit prévoir un état "machine en panne" pour les cas non prévus

Note 2 : le client étant souvent mesquin, il s'attache à de petits détails comme « la machine rendra-t-elle la monnaie si je mets plus de 50c ? ». Nous ne nous laisserons pas distraire par de telles futilités sans aucune importance dans le cadre de notre exercice.

Exercice 4 :

On considère l'alphabet $X = \{/, *, a, b, \cdots, z\}$. Construire un automate déterministe qui reconnaît le langage des commentaires en C. Un commentaire est une suite de caractères sur X, délimitée par `/*` et `*/`, et ne contenant pas `*/`.

Exercice 5 :
On considère l'alphabet $X = \{a, b, \cdots, z\}$. Construire un automate déterministe qui reconnaît les mots qui ont `rire` comme facteur.

Exercice 6 :
Soit L un langage quelconque. On dit que L est préfixe si et seulement si aucun préfixe d'un mot de L (autre que le mot lui-même) n'est dans L. Plus formellement :

$$\forall w \in L,\ \forall w_1, w_2 \text{ tels que } w = w_1.w_2,\ \text{ si } w_1 \in L \text{ alors } w_2 = \varepsilon.$$

Q 1 . Les langages suivants

1. a^*b
2. $(a+b)^*b$
3. $\{a^n b^n / n > 0\}$

sont-ils préfixes ? (justifier)
Q 2 . Donner une caractéristique d'un automate reconnaissant un langage reconnaissable préfixe.

Exercice 7 :
On considère l'alphabet $X = \{0, 1\}$ et langage $P = 1.(0+1)^*$ des mots qui commencent par 1. Chaque mot u de P peut être considéré comme l'écriture en binaire d'un entier strictement positif n. On notera succ(u) l'écriture en binaire de $n+1$ (cf feuille d'exercices précédente)
Par exemple, si $u = 11010011$ alors succ$(u) = 11010100$. si $u = 11$ alors succ$(u) = 100$.
On note $P' = \{u \in P \ \mid\ |u| = |\text{succ}(u)|\}$ ($|u|$ désigne la longueur du mot u). Si l'on reprend les exemples précédents, 11010011 appartient à P', par contre 11 n'appartient pas à P' car $|11|$ vaut 2 et son successeur est de longueur 3.
Q 1 . Définir un automate fini déterministe M_1 tel que $L(M_1) = P'$.
Soit le langage $E = \{h(u) \ \mid\ u \in P\}$, avec h la fonction qui « double » les lettres d'un mot. Plus formellement, h est définie par :
$h(0) = 00, h(1) = 11, h(u_1.u_2) = h(u_1).h(u_2)$.

Q 2 . Définir un automate fini déterministe M_2 tel que $L(M_2) = E$.
Pour tout mot $u \in P'$, on note $s(u)$ le mot $a_1b_1a_2b_2 \cdots a_kb_k$ tel que $u = a_1a_2 \cdots a_k$ et succ$(u) = b_1b_2 \cdots b_k$.
Par exemple, si $u = 1011$, alors succ$(u) = 1100$ et donc $s(u) = 11011010$.
Autre exemple : si $u = 10110111$, alors succ$(u) = 10111000$ et donc $s(u) = 1100111101101010$.

On pose $S = \{s(u) \ \mid\ u \in P'\}$

Q 3 . Trouver deux mots u_1 et u_2 tels que $S = E.\{u_1\}.\{u_2\}*$.
Q 4 . Définir un automate fini déterministe M_3 tel que $L(M_3) = S$.