TD2 - Automates et Langages

septembre 2018

Langages rationnels

Exercice 1 :

On dit que deux expressions rationnelles e_1 et e_2 sont *équivalentes*, ce qu'on dénote $e_1 \equiv e_2$, ssi ces expressions représentent les mêmes langages, i.e.

$$e_1 \equiv e_2 \text{ ssi } \mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(e_2)$$

Q 1 . Montrer que $\equiv$ est effectivement une relation d'équivalence.

Q 2 . On ne considèrera ici que les expressions rationnelles parenthésées.

Une *congruence* est une relation d'équivalence compatible avec les opérations de la structure algébrique considérée (ici, la structure algébrique est celle des expressions rationnelles munie des opérations $*$, $+$ et de la concaténation). Pour montrer que $\equiv$ est une congruence , il faut montrer que :

pour toutes expressions rationnelles e_1, e'_1, e_2 et e'_2,
si $e_1 \equiv e_2$ et $e'_1 \equiv e'_2$ alors

$$(e_1) + (e'_1) \equiv (e_2) + (e'_2)$$
$$(e_1).(e'_1) \equiv (e_2).(e'_2)$$
$$(e_1)^* \equiv (e_2)^*$$

Montrer que $\equiv$ est une congruence.

Exercice 2 :

(*extrait du livre de P. Wolper*) Simplifier les expressions rationnelles suivantes.

Q 1 . $(\epsilon + a^* + b^* + a + b)^*$

Q 2 . $a(a + b)^*b + (ab)^* + (ba)^*$

Exercice 3 :

Démontrez les équivalences suivantes.

Q 1 . $(\epsilon + a)(a + b)^* \equiv (a + b)^*(\epsilon + b)$

Q 2 . $b(ab)^* \equiv (ba)^*b$

Q 3 . $(b(aa)^*b + a)^* \equiv (ba(aa)^*ab + a + bb)^*$