Université de Lille — FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES, Département Informatique

Formations en Informatique de Lille – 2017/2018

# Automates et Langages
# Examen 1ère session

décembre 2017

*Documents autorisés*

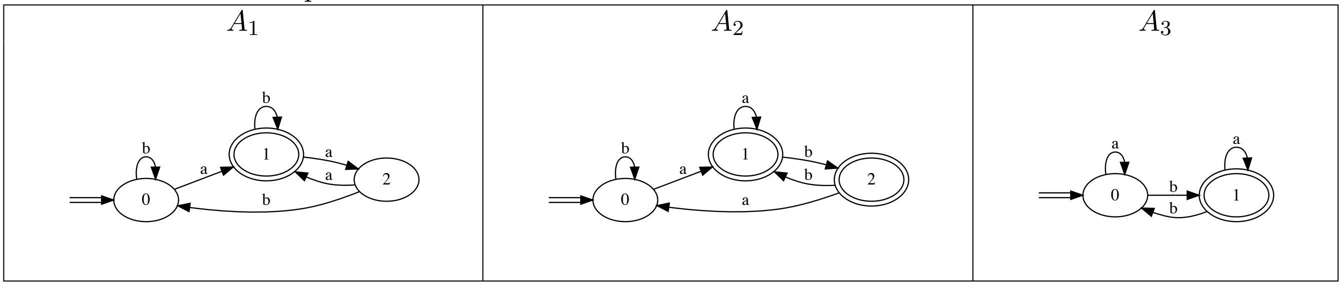
**Répondre impérativement sur la copie pour les exercices 1 & 2 et sur le formulaire pour les exercices 3, 4 & 5.**
**Ces deux parties sont susceptibles d'être corrigées par des correcteurs différents.**

## Préambule : définitions et notations

— Pour tout langage $L$ sur un alphabet $\Sigma$, et toute lettre $l$ (appartenant ou non à $\Sigma$), on définit sur l'alphabet $\Sigma \cup \{l\}$ le langage $L \downarrow l = \{u_1 l u_2 \mid u_1 u_2 \in L, u_1 \in \Sigma^*, u_2 \in \Sigma^*\}$. Les mots de $L \downarrow l$ sont donc obtenus à partir des mots de $L$ en insérant un $l$.

— Pour tout ensemble fini de symboles $Q$, on appelle $\bar{Q}$ l'ensemble des symboles obtenus en surmontant ceux de $Q$ d'une barre : $\bar{Q} = \{\bar{q} \mid q \in Q\}$.

Automates intervenant par la suite :




## Exercice 1 :

**Q 1 .**

1. Écrire le système d'équations de langages $L_q$ associé à l'automate $A_1$.
2. Exprimer $L_0$ en fonction de $L_1$. (justifier)
3. Donner une expression rationnelle pour $L_1$ (sans inconnues : utilisant uniquement $a$ et $b$) (justifier)
4. Montrer que $\mathcal{L}(A_1) = b^*a(b + ab^*a)^*$

**Q 2 .**

1. L'automate $A_1$ est-il déterministe ? complet ? accessible ? co-accessible ?
2. Construire un automate $A_4$ déterministe complet minimal équivalent à $A_1$ (la réponse finale ne suffit pas, il faut la justifier)
3. En une ligne, indiquez la caractéristique des mots de $\mathcal{L}(A_1)$

## Exercice 2 :

**Q 1 .**

1. Indiquer, par longueurs croissantes, l'ensemble des mots de $(ab)^* \downarrow c$ de longueur inférieure ou égale à 5.
2. Proposez, sans preuve, une expression rationnelle pour $(ab)^* \downarrow c$.
3. Proposez un automate déterministe à 2 états pour $(ab)^*$. En déduire un automate déterministe à 4 états pour $(ab)^* \downarrow c$.
4. Proposez, en partant des automates $A_2$ et $A_3$, un automate déterministe à 4 états pour $\mathcal{L}(A_3) \downarrow c$ et un automate déterministe à 6 états pour $\mathcal{L}(A_2) \downarrow c$.

**Q 2 .** Soit $A = (\Sigma, Q, q_{ini}, \mathcal{F}, \delta)$, un automate déterministe, et $l$ une lettre ($l \notin \Sigma$).

1. Complétez la définition d'un automate déterministe $A' = (\Sigma \cup \{l\}, Q \cup \bar{Q}, q'_{ini}, \mathcal{F}', \delta')$ de façon à ce qu'il reconnaisse le langage $\mathcal{L}(A) \downarrow l$ (soyez rigoureux et précis dans la définition de $A'$)
2. Si $L$ est un langage sur un alphabet $\Sigma$, et $l \notin \Sigma$ une lettre, justifier en 3 lignes **maximum** l'affirmation : $L$ est rationnel $\implies L \downarrow l$ est rationnel

**Exercice 3 :**

**Q 1 .** En vous inspirant de la construction faite à l'exercice précédent pour $\mathcal{L}(A_3) \downarrow c$, construire un automate **non** déterministe à 4 états pour le langage $\mathcal{L}(A_3) \downarrow b$

**Q 2 .** Construire un automate déterministe complet minimal équivalent.

**Exercice 4 :**

Soit la grammaire $G_0 = (\{a, b, c\}, \{S, U\}, S, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R} = \left| \begin{array}{lll} \text{S} & \rightarrow & \text{aSb} \mid \text{Uc} \mid \text{cU} \\ \text{U} & \rightarrow & \text{aUb} \mid \varepsilon \end{array} \right.$

**Q 1 .** Montrer que $G_0$ est ambigüe.

**Q 2 .** Soit la grammaire $G = (\{a, b, c\}, \{S, T, U\}, S, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R} = \left| \begin{array}{lll} \text{S} & \rightarrow & \text{aSb} \mid \text{Tc} \mid \text{cU} \\ \text{T} & \rightarrow & \text{aUb} \\ \text{U} & \rightarrow & \text{aUb} \mid \varepsilon \end{array} \right.$

1. Donnez la liste des mots de $\mathcal{L}(G)$ de longueur inférieure ou égale à 4 . Pour chacun vous indiquerez une dérivation permettant de l'obtenir.
2. Donnez la liste des mots de $\mathcal{L}(G)$ de longueur 5 (les dérivations ne sont pas demandées)
3. Indiquez un arbre de dérivation pour un mot (que vous choisirez) de longueur 5 et dont l'avant-dernière lettre est un $c$ (scoop : il y en a au moins un !).

**Q 3 .** On s'intéresse maintenant au langage étendu $\hat{\mathcal{L}}(G)$

1. Quel est l'ensemble des mots de $\hat{\mathcal{L}}(G)$ qui comportent un $S$ ? Vous donnerez une caractérisation du style $\{b^i a^k c^i S \mid 0 \leq i, 0 \leq k\}$ (bien sûr cette réponse est fausse, ce n'est qu'un exemple de forme de réponse attendue). Il n'est pas demandé de preuve.
2. Idem pour les mots de $\hat{\mathcal{L}}(G)$ qui comportent un $T$
3. Idem pour les mots de $\hat{\mathcal{L}}(G)$ qui comportent un $U$
4. Idem pour les mots de $\mathcal{L}(G)$

**Q 4 .**

1. Donnez une expression de $\mathcal{L}(G)$ en fonction de $L = \{a^n b^n \mid 0 \leq n\}$.
2. Prouvez votre réponse (en utilisant vos réponses à la question 3)

**Exercice 5 :**

Pour la grammaire $G$ définie dans l'exercice précédent.

**Q 1 .** Quelles sont les variables $\varepsilon$-productives ?

**Q 2 .** Écrire l'ensemble « Premier » de chaque partie droite de règle **et** de chaque variable.

**Q 3 .** Écrire l'ensemble « Suivant » de chaque variable. Le marqueur de fin de mot sera noté **#**

**Q 4 .** La grammaire $G$ est-elle LL(1) ? Si oui, indiquez sa table d'analyse.