Formations en Informatique de Lille – 2016/2017

Université de Lille 1 SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Automates et Langages
Examen 1ère session

décembre 2016

Documents autorisés.
Pour certaines questions, une longueur indicative de réponse est donnée : ***merci d'en tenir compte.***
Définitions, notations et rappels

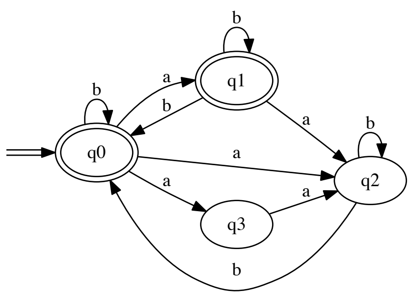
1. Définition : le **miroir d'un mot** u, noté $\tilde{u}$, est le mot u « à l'envers » : si $u = x_1x_2...x_n$ avec $x_i \in \Sigma$, alors $\tilde{u} = x_n...x_2x_1$. Évidemment, $\tilde{\tilde{u}} = u$ et si $x \in \Sigma$, $\widetilde{xu} = \tilde{u}x$
2. Le **miroir d'un langage** L, noté $\widetilde{L}$, est l'ensemble des miroirs des mots de L : $\widetilde{L} = \{\tilde{u},\ \text{où } u \in L\}$
3. Définition : $\overline{L} = \{u.\tilde{u},\ \text{où } u \in L\}$
4. On notera $det(A)$ l'automate obtenu en déterminisant A par la méthode usuelle vue en cours et qui donne un automate déterministe, complet et accessible équivalent à A.
5. Rappel : Pour un non déterministe $A = (\Sigma, \mathcal{Q}, Ini, \mathcal{F}, \delta)$, $\quad \forall q, p \in \mathcal{Q},\ \forall x \in \Sigma,\ \forall w \in \Sigma^*$:
   $p \in \hat{\delta}(q, \varepsilon) \iff p = q$
   $p \in \hat{\delta}(q, wx) \iff \exists q' \in \hat{\delta}(q, w),\ p \in \delta(q', x)$
   $p \in \hat{\delta}(q, xw) \iff \exists q' \in \delta(q, x),\ p \in \hat{\delta}(q', w)$
6. Rappel : pour tout automate et pour chacun de ses états q, le langage L_q est l'ensemble des mots qui permettent, en partant de q, d'arriver dans un état acceptant : $L_q = \{w | \hat{\delta}(q, w) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}$.

Exercice 1 :
Soit l'expression rationnelle $e = a^*b(b + aa + aba^*b)^*$ et L le langage dénoté par e.
Q 1 . Indiquez l'ensemble des mots de L de longueur ≤ 3
Q 2 . Soit un automate déterministe (non nécessairement complet) reconnaissant L. On appelle q_0 son état initial. *Chaque réponse aux points qui suivent devra être justifiée en une demi-ligne environ.*

a. q_0 est-il acceptant ?
b. Pourquoi $\delta(q_0, b)$ est-il nécessairement défini ? Est-il acceptant ? Pourquoi $\delta(q_0, b) \neq q_0$? (par la suite on appellera q_1 cet état)
c. Pourquoi $\delta(q_1, a)$ est-il nécessairement défini ?
d. Est-il acceptant ?
e. Pourquoi $\delta(q_1, a) \neq q_0$?

Q 3 . Trouvez un automate **déterministe complet** à 3 états qui reconnaît L.
Q 4 . Calculez l'ensemble des résiduels de L. Pour simplifier l'écriture vous poserez $L_1 = b+aa+aba^*b$ et $L = a^*bL_1^*$.
Qu'en déduire à propos de l'automate trouvé à la question précédente ?
Q 5 . Indiquez une grammaire régulière qui engendre L
Q 6 . Indiquez une grammaire algébrique qui engendre $\overline{L}$
Q 7 . On considère un langage rationnel M engendré par une grammaire régulière $G = (\Sigma, \mathcal{V}, S, \mathcal{R})$ On appellera $\mathcal{R}_2$ l'ensemble des règles de $\mathcal{R}$ dont la partie droite appartient à $\Sigma\mathcal{V}$, $\mathcal{R}_1$ l'ensemble de celles dont la partie droite appartient à Σ et $\mathcal{R}_0$ celles dont la partie droite vaut ε.
Définissez, en fonction de G, une grammaire algébrique qui engendre le langage $\overline{M}$

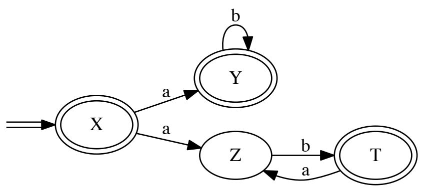
Exercice 2 :



Q 1 . Déterminisez l'automate ci-contre (écrivez la table de l'algorithme de déterminisation puis dessinez l'automate)
Q 2 . Calculez l'automate déterministe complet minimal équivalent.

Exercice 3 :

L'automate transposé, noté $tr(A)$, d'un automate non déterministe est obtenu en échangeant les états initiaux et acceptants et en inversant le sens des flèches. Plus précisément, si $A = (\Sigma, \mathcal{Q}, Ini, \mathcal{F}, \delta)$ alors $tr(A) = (\Sigma, \mathcal{Q}_t, Ini_t, \mathcal{F}_t, \delta_t)$ où $Q_t = Q,\ Ini_t = \mathcal{F},\ \mathcal{F}_t = Ini$ et $\delta_t(q, x) = \{p \mid q \in \delta(p, x)\}, \forall q \in Q, \forall x \in \Sigma,$ On remarque que $q \in \delta(p, x) \iff p \in \delta_t(p, x)$



Q 1 . L'automate ci-contre reconnaît le langage $ab^* + (ab)^*$. Dessinez son automate transposé.
Donnez une expression rationnelle pour le langage reconnu par l'automate transposé. Que représente ce dernier langage vis à vis du langage de l'automate de départ ?

Q 2 . Montrer que pour tout automate $A = (\Sigma, \mathcal{Q}, Ini, \mathcal{F}, \delta)$,
$\forall q, p \in \mathcal{Q}, \forall w \in \Sigma^*, \quad (p \in \hat{\delta}(q, w) \iff q \in \hat{\delta}_t(p, \widetilde{w}))$
Vous ferez un récurrence sur $|w|$ en commençant par montrer la propriété est vraie pour $w = \varepsilon$ puis que si elle est vraie pour tout mot d'une longueur n fixée, elle l'est pour tout mot de longueur $n + 1$

Q 3 . Déduisez-en que pour tout automate A, le langage reconnu par $tr(A)$ est le miroir du langage reconnu par A. *(2 lignes environ)*

Exercice 4 :

Q 1 . Reprenez l'automate non déterministe de l'exercice 2. Appelons le K. Dessinez son transposé $tr(K)$, puis déterminisez ce transposé pour obtenir $det(tr(K))$.

Q 2 . En partant de l'automate obtenu à la question 1, recommencez les mêmes opérations (transposez puis déterminisez). Vous obtenez $det(tr(det(tr(K))))$. Que constatez-vous ?

Pour la suite vous pourrez utiliser les propriétés énoncées aux questions 2 et 3 de l'exercice précédent.

Q 3 . Soit A un automate non déterministe quelconque et $\mathcal{L}$ son langage reconnu, expliquez (en 2 lignes) pourquoi $det(tr(det(tr(A))))$ est un automate déterministe complet qui reconnaît $\mathcal{L}$.

Q 4 . Soit un automate $AD = (\Sigma, \mathcal{Q}, Ini, \mathcal{F}, \delta)$. On supposera que Ini est le singleton $\{q_{ini}\}$ et que $\forall q, \forall x, \delta(q, x)$ est également un singleton (NB : a fortiori $\forall w, \hat{\delta}(q, w)$ est un singleton). Cela signifie que AD **est en fait déterministe et complet**. Enfin, on supposera que tout état de AD est **accessible**. On considère l'automate transposé $tr(AD)$ et sa fonction de transition δ_t.

a. Montrez que pour tout mot w il existe un **unique** état q tel que $q_{ini} \in \hat{\delta}_t(q, w)$ *(1 ligne)*
b. En déduire que, dans l'automate $tr(AD)$, les langages L_q sont 2 à 2 disjoints, c'est à dire que $q \neq q' \implies L_q \cap L_{q'} = \emptyset$. *(1 ligne)*
c. Expliquez pourquoi aucun L_q n'est vide. *(1 ligne)*

Q 5 . On admettra la propriété : « Si B est un automate dont tous les ensembles L_q sont **non vides** et **disjoints**, alors $\mathbf{det(B)}$ est tel que **ses** langages L_q sont 2 à 2 **distincts** : $q \neq q' \implies L_q \neq L_{q'}$ ». Expliquez pourquoi $det(tr(AD))$ est un automate minimal ? *(2 lignes)*

Q 6 . Déduisez-en que pour tout automate non déterministe A, $det(tr(det(tr(A))))$ est l'automate déterministe complet minimal équivalent à A. *(2 lignes)*

Exercice 5 :

Q 1 . Soit la grammaire $G_1 = (\{a, b\}, \{S, T, U\}, S, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R} = \left|\begin{array}{lcl} \text{S} & \rightarrow & \text{bSb} \mid \text{aTa} \mid \varepsilon \\ \text{T} & \rightarrow & \text{aUa} \\ \text{U} & \rightarrow & \text{bSb} \end{array}\right.$

Cette grammaire est-elle LL(1) ? (justifiez en donnant les différentes étapes de votre raisonnement)

Q 2 . Même question pour la grammaire $G_2 = (\{a, b, c, d\}, \{S, T\}, S, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R} = \left|\begin{array}{lcl} \text{S} & \rightarrow & \text{aUb} \mid \text{T} \\ \text{T} & \rightarrow & \text{cT} \mid \varepsilon \\ \text{U} & \rightarrow & \text{c} \mid \text{Ud} \end{array}\right.$